Vibrações e Ruído

Aula TP - 1

1)

a) Sabendo que:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{G I_p}$$

Para $0 \leq x \leq l_1$:

$$\theta(x) = \int \frac{\overbrace{M(x)}^{M}}{G I_{p_1}} dx = \frac{M}{G I_{p_1}} x + C$$

C.F.: $\theta|_{x=0} = 0$ rad $\Rightarrow C = 0$ $\therefore$ $\theta(x) = \frac{M}{G I_{p_1}} \cdot x$

Para $l_1 < x \leq l_1 + l_2$:

$$\theta(x) = \int \frac{M}{G I_{p_2}} dx = \frac{M}{G I_{p_2}} \cdot x + C'$$

C.F.: $\theta|_{x=l_1^+} = \theta|_{l_1^-} \Rightarrow C' = \frac{M l_1}{G}\left(\frac{1}{I_{p_1}} - \frac{1}{I_{p_2}}\right)$ $\therefore$

$$\therefore \quad \theta(x) = \frac{M}{G I_{p_2}} \cdot x + \frac{M l_1}{G}\left(\frac{1}{I_{p_1}} - \frac{1}{I_{p_2}}\right)$$

b) Constante de rigidez:

$$M_t = K_t \cdot \Delta\theta \Rightarrow K_{eq} = \frac{M}{\theta_B - \theta_A} = \frac{M}{\theta|_{x=l_1+l_2} - \theta|_{x=0}}$$

$$K_{eq} = \frac{M}{\left(\frac{M l_1}{G I_{p_2}} + \frac{M l_2}{G I_{p_2}} - \frac{M l_1}{G I_{p_1}} - \frac{M l_2}{G I_{p_2}}\right) - (0)} \Leftrightarrow K_{eq} = \frac{1}{\frac{l_2}{G I_{p_2}(I_{p_1})} + \frac{l_1}{G I_{p_1}(I_{p_2})}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K_{eq} = \frac{G I_{p1} \cdot I_{p2}}{l_2 I_{p1} + l_1 I_{p2}}} \quad //$$

Alternativa: (com mais contas)



$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$K_1 = \frac{M}{\theta|_{x=l_1} - \theta|_{x=0}} = \frac{M}{\left(\frac{M}{G I_{p_1}} l_1\right) - (0)} = \frac{G I_{p1}}{l_1}$$

$$K_2 = \frac{M}{\theta|_{x=l_2+l_2} - \theta|_{x=l_1}} = \frac{M}{\left[\frac{M}{G I_{p_2}}(l_1+l_2) + \frac{M l_1}{G}\left(\frac{1}{I_{p_1}} - \frac{1}{I_{p_2}}\right)\right] - \left(\frac{M}{G I_{p1}} l_1\right)} = \frac{1}{\frac{l_2}{G I_{p2}}} = \frac{G I_{p_2}}{l_2}$$

Então:

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{l_1}{G I_{p1}} + \frac{l_2}{G I_{p2}} \Rightarrow K_{eq} = \frac{1}{\frac{l_1}{G I_{p1}} + \frac{l_2}{G I_{p2}}} = \frac{G I_{p1} \cdot I_{p2}}{l_2 I_{p1} + l_1 I_{p2}} \quad //$$

c) $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$ [rad/s]



Eq. Diferencial do Movimento do Disco em Regime Livre (ou Natural):

$$-\underbrace{J_B}_{K_B} \cdot \ddot{\theta}(t) - K_{eq} \cdot \theta(t) = 0 \Leftrightarrow J_B \cdot \ddot{\theta}(t) + K_{eq} \cdot \theta(t) = 0$$

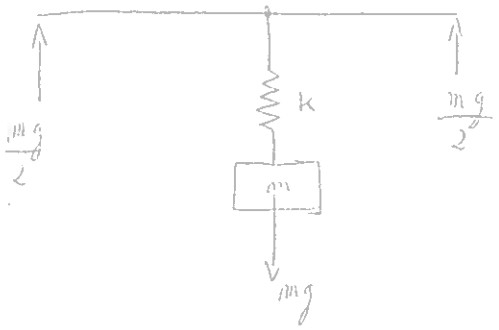
Logo: $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{J_B}}$

Com $K_{eq} = \frac{G I_{p_1} I_{p_2}}{l_2 I_{p_1} + l_1 I_{p_2}} = \frac{\cancel{G} \times \left(\frac{25000}{\cancel{G}}\right) \times \left(\frac{14000}{\cancel{G}}\right)}{0{,}600 \times \frac{25000}{G} + 0{,}800 \times \frac{14000}{G}} = 14000 \ N.m$

Exprimindo w_n em função de J_B:

$$w_n = \sqrt{\frac{1400}{J_B}} \simeq 118{,}32 \cdot \sqrt{\frac{1}{J_B}} \quad [rad/s]$$

2) a)



$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_{barra}} + \frac{1}{k}$$

Diagrama de Corpo Livre da Barra



$$F = k_b \cdot \delta \Rightarrow mg = k_b \cdot \frac{Pl^3}{48EI} \Leftrightarrow k_b = \frac{48mgEI}{Pl^3} = \frac{48EI}{l^3}$$

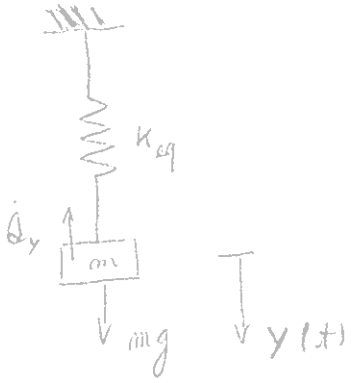
Então:

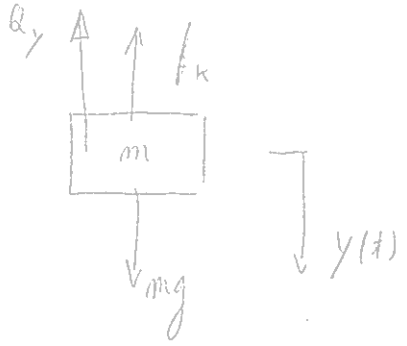
$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{l^3}{48EI} + \frac{1}{k} \Leftrightarrow k_{eq} = \frac{1}{\frac{l^3}{48EI} + \frac{1}{k}}$$

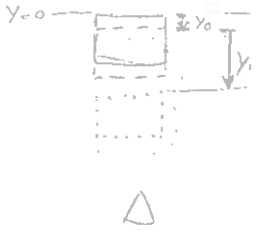
Substituindo valores:

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{2^3}{48 \times 1500} + \frac{1}{3000}} = 2250 \ N\,m^{-1}$$

b)







Eq. Estática:

$$mg - K_{eq} \cdot y_0 = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{mg}{K_{eq}}$$

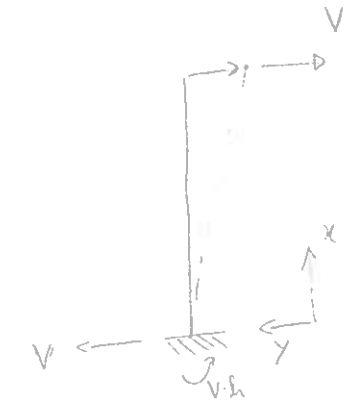
Eq. Movimento da massa em Regime Livre (admitindo que y(t) é contado a partir da posição da mola deformada)

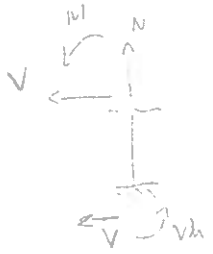
$$-m\ddot{y}(t) - K_{eq}\left(y(t) + y_0\right) + mg = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{m}_{m_{eq}}\ddot{y}(t) + \underbrace{K_{eq}}_{K_{eq}} \cdot y(t)$$

Como: $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{2250}{2,5}} = 30 \text{ rad/s}$

3) a) i)





$$M - V \cdot x + Vh = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M = V \cdot (x - h)$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_f(x)}{EI}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int + \frac{V \cdot (x-h)}{EI}\, dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = + \frac{Vx^2}{2EI} - \frac{Vh \cdot x}{EI} + C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = + \frac{Vx^3}{6EI} - \frac{Vhx^2}{2EI} + C_1 x + C_2$$

C. F.

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$

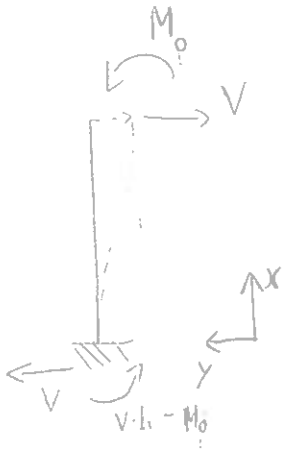
Logo: $x_{barra} = y|_{x=h} = + \frac{V h^3}{6EI} - \frac{V h^3}{2EI_{(3)}} = - \frac{2V h^3}{6EI} = - \frac{V h^3}{3EI}$

$V = K_{eq} \cdot (x_{barra} - 0)$

Como as 2 colunas estão em paralelo: $K_{eq} = K_1 + K_2 = 2K$

$V = K \left| - \frac{V h^3}{3EI} - 0 \right| \Rightarrow K = \frac{3EI}{h^3} \Rightarrow K_{eq} = 2K = \frac{6EI}{h^3}$

ii)





$M + Vh - M_0 - V \cdot x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M = V(x - h) + M_0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int \frac{V(x-h) + M_0}{EI} dx = \frac{Vx^2}{2EI} - \frac{Vhx}{EI} + \frac{M_0 x}{EI} + C_1$

$\Leftrightarrow y = \frac{Vx^3}{6EI} - \frac{Vhx^2}{2EI} + \frac{M_0 x^2}{2EI} + C_1 x + C_2$

VP

$$y|_{x=0} = 0 \qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=h} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \\ 0 = \frac{V h^2}{2EI} - \frac{V h^2}{EI} + \frac{M_0 h}{EI} \Rightarrow M_0 = \frac{Vh}{2} \end{cases}$$

(1) (4)

$$y = \frac{V x^3}{6EI} - \frac{V h x^2}{2EI} + \frac{V h x^2}{4EI} \Leftrightarrow y = \frac{V x^3}{6EI} - \frac{V h x^2}{4EI}$$

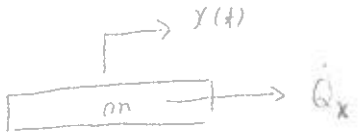
(2)

$$V = k \cdot \left| \left(\frac{V h^3}{6EI} - \frac{V h^3}{4EI} \right) - 0 \right| \Leftrightarrow k = \frac{12EI}{h^3}$$

(2) (3)

$$k_{eq} = 2k = \frac{24EI}{h^3}$$

b)



$$-m\ddot{x}(t) - \underbrace{K_{eq}}_{2k} \cdot x(t) = 0 \Leftrightarrow m \cdot \ddot{x}(t) + 2k \cdot x(t) = 0$$

c) i)

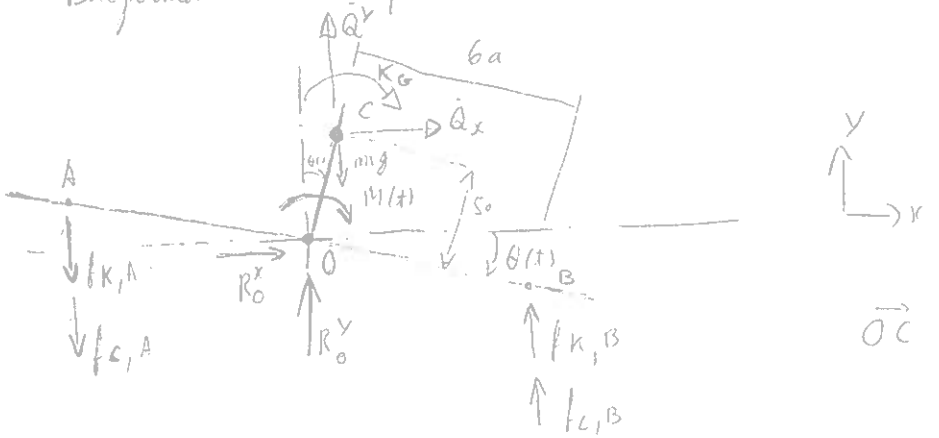
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{\frac{6EI}{h^3}}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{6 \times 163\,380}{3^3}}{1000}} \approx 6{,}03 \text{ rad/s}$$

ii)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{\frac{24 \times 163\,380}{3^3}}{1000}} \approx 12{,}05 \text{ rad/s}$$

Aula TP - 2

1) Diagrama de corpo livre:



$$\vec{OC} = \begin{vmatrix} 5a\,\sin\theta \\ -5a\,\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{OG}$$

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}_c = m \cdot \dot{\vec{OC}} = m \begin{vmatrix} 5a\,\dot\theta\cos\theta \\ 5a\,\dot\theta\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\dot{\vec{Q}} = m \cdot \ddot{\vec{OC}} = m \begin{vmatrix} 5a\,\ddot\theta\cos\theta - 5a\,\dot\theta^2\sin\theta \\ 5a\,\ddot\theta\sin\theta + 5a\,\dot\theta^2\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{H}_G = [I_G] \times \vec{\omega} \Longrightarrow \vec{H}_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz}\cdot\dot\theta \end{vmatrix}$$

Como a massa está concentrada em G: $\boxed{I_{zz} = 0}$

$$\vec{H}_G = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_G = \vec{H}_{G/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

referencial zero (fixo)

$$\vec{K}_O = \vec{K}_G + \vec{OG} \times \dot{\vec{Q}} = \begin{vmatrix} 5a\,\sin\theta \\ -5a\,\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \left(m \begin{vmatrix} 5a\,\ddot\theta\cos\theta - 5a\,\dot\theta^2\sin\theta \\ 5a\,\ddot\theta\sin\theta + 5a\,\dot\theta^2\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \right)$$

Fazendo uma aproximação com os 1os termos da Série de Taylor: $\cos\theta = 1 \quad \vee \quad \sin\theta = \theta$;

Ficando:

$$\vec{OG} = \begin{vmatrix} sa\,\theta \\ sa \\ 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \dot{Q} = m \begin{vmatrix} sa\,\ddot{\theta} - sa\,\dot{\theta}\,\theta \\ sa\,\ddot{\theta}\,\theta + sa\,\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

LINEARIZANDO:

$$\dot{Q} = m \begin{vmatrix} sa\,\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Pelo que:

$$\vec{K_O} = \vec{K_G} + \vec{OG} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} sa\,\theta \\ sa \\ 0 \end{vmatrix} \times m \begin{vmatrix} sa\,\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -sa^2\,\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma M_O = K_O \Rightarrow \vec{OA} \times \left(\vec{f}_{K,A} + \vec{f}_{C,A} \right) + \vec{OB} \times \left(\vec{f}_{K,B} + \vec{f}_{C,B} \right) + \vec{M}(t) +$$

$$+ \vec{OG} \times (m\vec{g}) = \vec{K}_O$$

$$\vec{f}_{K,A} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -K \cdot sen\,\theta \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -K\theta \end{vmatrix}$$

Definição dos vectores:

$$\vec{f}_{K,A} = \begin{vmatrix} 0 \\ -K\,6a\,sen\theta \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{f}_{K,A} \cong \begin{vmatrix} 0 \\ -K\,6a\,\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_{C,A} = \begin{vmatrix} 0 \\ -C\,6a\left[\frac{d}{d\theta}(sen\,\theta)\right] \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -C6a\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \cong \begin{vmatrix} 0 \\ -C \cdot 6a \cdot \dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_{K,B} = \begin{vmatrix} 0 \\ K6a\,\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{f}_{C,B} = \begin{vmatrix} 0 \\ C\,6a\,\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Então:

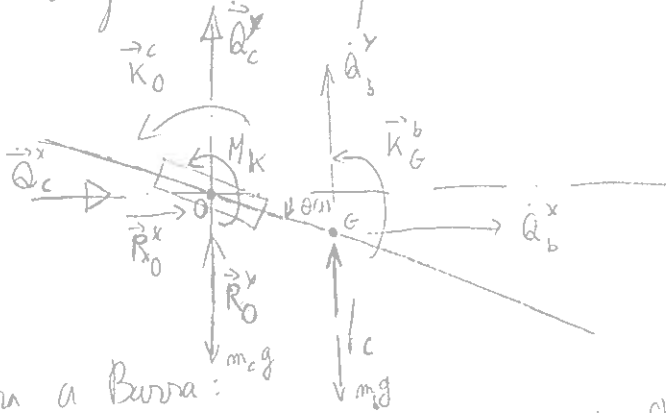
$$\Sigma M_O = K_O \Leftrightarrow \quad 6a \cdot (K\,6a\,\theta + C \cdot 6a\,\dot{\theta}) + 6a\,(K\,6a\,\theta + C\,6a\,\dot{\theta}) -$$

$$- M(t) - 5a \underbrace{\sin\theta}_{\approx\theta} \cdot mg = -25\, m\, a^2\, \ddot{\theta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 25\, m\, a^2\, \ddot{\theta} + 72\, a^2\, C \cdot \dot{\theta} + 72\, a^2\, K \cdot \theta - 5a\, mg\, \theta = M(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\underbrace{(25\, m\, a^2)}_{m_{eq}} \cdot \ddot{\theta}(t) + \underbrace{(72\, a^2\, C)}_{C_{eq}} \cdot \dot{\theta}(t) + \underbrace{(72\, a^2 K - 5a\, mg)}_{K_{eq}} \cdot \theta(t) = M(t)}$$

2) Diagrama de Corpo Livre:



Para a Barra:

$$\vec{H}_G^b = \begin{bmatrix} I_{xx}^b & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^b & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^b \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{zz}^b \cdot \dot{\theta} \end{vmatrix}$$

Como: $I_{zz}^b\Big|_G = \frac{1}{12}\, m\, l^2$

$$\vec{H}_G^b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{12} m l^2\, \dot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_O^b = \vec{H}_{G/O} + \vec{OG} \times \vec{Q}$$

$$\vec{Q}_b = \frac{d}{dt}\left[m \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \right] \simeq m \begin{vmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{Q}_b = m \begin{vmatrix} 0 \\ -a\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_0^{\,b} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{12} m l^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -a\,m\,\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -a^2 m\,\ddot{\theta} - \frac{1}{12} m l^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Para o Colar:

$$I_{zz}^{c} = J_0^{c}$$

$$\vec{K}_0^{\,c} = \vec{K}_G^{\,c} = \vec{\dot{H}}_{G/0}^{\,c}$$

$$\vec{H}_G^{\,c} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & (J_0^{c}) \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -J_0^{c}\dot{\theta} \end{vmatrix}$$

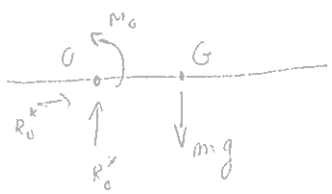
$$\vec{K}_0^{\,c} = \vec{K}_G^{\,c} = \vec{\dot{H}}_{G/0}^{\,c} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -J_0^{c}\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Conclui-se que, considerando o sistema:

$$\Sigma \vec{M}_0 = \vec{K}_0^{\,c} + \vec{K}_0^{\,b} \Rightarrow -M(t) + M_k - m_b g \cdot a \underbrace{\cos\theta}_{\approx 1} + f_c \cdot a \underbrace{\cos\theta}_{\approx 1} = -a^2 m\ddot{\theta} - \frac{1}{12} m l^2 \ddot{\theta} - J_0^{c}\ddot{\theta}$$

Para calcular M_k:

Situação de equilíbrio estático: $\theta = 0$ rad



$$M_0 = mga \Rightarrow K_t \cdot \theta_0 = mga \Rightarrow \theta_0 = \frac{mga}{K_t}$$

Portanto, em movimento: $-\theta_0$

$$M_K = k_t \left(\theta(t) - \theta_{\text{não deformada}} \right) = k_t \left(\theta(t) + \theta_0 \right)$$

Ver:  θ_0 é contrário a $\theta(t)$

Só falta f_c:

$$f_c = c \cdot \frac{d}{d\theta}(a \sin\theta) = c \cdot a \cdot \dot{\theta} \underbrace{\cos\theta}_{\approx 1} \approx c \cdot a \cdot \dot{\theta}$$

Então, a eq. diferencial do movimento:

$$-M(t) + k_t \cdot \left(\theta(t) + \frac{\cancel{m} g a}{\cancel{k_t}} \right) - \cancel{m g a} \underbrace{\cos\theta}_{\approx 1} + c a^2 \dot{\theta} = -a^2 m \ddot{\theta} -$$

$$- \frac{1}{12} m l^2 \ddot{\theta} - J_0^c \ddot{\theta} \iff$$

$$\iff \boxed{\underbrace{\left(a^2 m + \frac{1}{12} m l^2 + J_0^c \right)}_{m_{eq}} \ddot{\theta}(t) + \underbrace{(c \cdot a^2)}_{c_{eq}} \dot{\theta}(t) + \underbrace{(k_t)}_{k_{eq}} \cdot \theta(t) = M(t)}$$

Aula TP - 3

1) a) Ver exercício anterior e retirar o termo "$M(t)$".

$$\left(a^2 m + \frac{1}{12} m l^2 + J_0^c \right) \ddot{\theta}(t) + \left(c \cdot a^2 \right) \dot{\theta}(t) + k_t \cdot \theta(t) = 0$$

b) $\xi = \frac{c_{eq}}{c_c}$ $\rightarrow c_c = 2 \cdot m_{eq} \cdot \omega_n$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{2}{0,12^2 \times 1,25 + \frac{1}{12} \times 1,25 \times 0,5^2 + (J_0^c)}}$$

A
I_7

Não podemos ir por aqui.

No enunciado diz que:

$$T = 1,3\,s \Rightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \cong 4,8332 \text{ rad/s}$$

Pelo Decremento logarítmico:

$$\delta = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2 = t_1 + T)} = \ln \frac{\frac{28,90 \cdot \pi}{180}}{\frac{14,07 \pi}{180}} \cong 0,7198$$

Como: $\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \boxed{\xi \cong 0,1138}$

c) $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{4,8332}{\sqrt{1-0,1138^2}} \cong 4,8648$ rad/s

d) $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow 4,8648 = \sqrt{\frac{2}{0,12^2 \times 1,25 + \frac{1}{12} \times 1,25 \times 0,5^2 + J_0^c}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J_0^c \cong 0,0405$ kg m^2

e) $\xi = \frac{C_{eq}}{C_c} \Leftrightarrow \xi = \frac{C_{eq}}{2\, m_{eq}\, \omega_n} \Leftrightarrow 0,1138 = \frac{C \cdot 0,12^2}{2 \times 0,084 \times 4,8648} \Leftrightarrow C \cong 6,50$ Ns/m

(0,0845 1(c))

f) $x(t) = A\, e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d \cdot t - \phi)$

com: $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cong 4,8332$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega_n x_0}{\underbrace{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_d}}\right)^2 + x_0^2}$

$$\phi = \arctan \frac{A_2}{A_1} = \arctan \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega_n x_0}{\underbrace{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_d} x_0}$$

Indo às expressões, sabendo que $x_0 \to \theta_0$

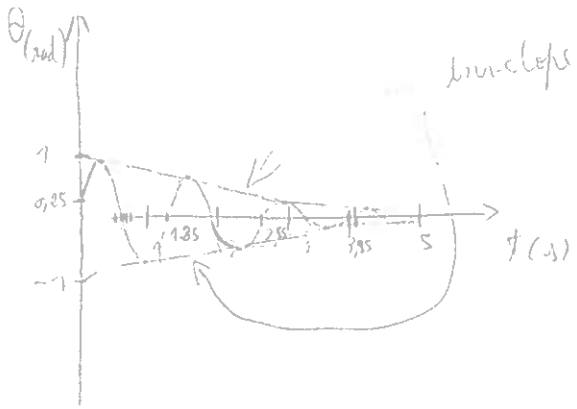
$$\omega_d = 4{,}8332 \text{ rad/s}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{5 + 0{,}1138 \times 4{,}8648 \times 0{,}25}{4{,}8332}\right)^2 + 0{,}25^2} \approx 1{,}092$$

$$\phi = \arctan \frac{5 + 0{,}1138 \times 4{,}8648 \times 0{,}25}{4{,}8332 \times 0{,}25} \approx 1{,}340 \text{ rad}$$

Portanto, a resposta fica:

$$\theta(t) = 1{,}092\, e^{-0{,}5536 \cdot t} \cdot \cos(4{,}8332 \cdot t - 1{,}340)$$



Trata-se de um movimento harmónico amortecido a frequência $\omega_d \approx 4{,}8332$ rad/s (constante) e que é limitado pelas envolventes $\pm 1{,}092\, e^{-0{,}5536 \cdot t}$. O amortecimento é tal que ao fim de 5 s a distância entre envolventes é de: $1{,}092\, e^{-0{,}5536 \times 5} - (-1{,}092\, e^{-0{,}5536 \times 5}) \approx 0{,}14$ rad, ou seja os deslocamentos angulares máximos fazem um ângulo de 0,14 rad $\approx 8°$

g) $1{,}092\, e^{-0{,}5536 \cdot t} \cos(4{,}8332 t - 1{,}340) = 0 \Rightarrow \cos(4{,}8332 t - 1{,}340) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4{,}8332 t - 1{,}340 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \approx 0{,}602 + k 0{,}65$, $k \in \mathbb{Z}$

Logo, a 1ª vez que o sistema passa pela posição de equilíbrio estático é para $t \cong 0{,}602$ s $\approx 0{,}6$ s

h)

$$\frac{d}{dt}\left[1{,}092\, e^{-0{,}5536\,t}\cos\left(4{,}8332\,t - 1{,}340\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}6045312\, e^{-0{,}5536\,t}\cos\left(4{,}8332\,t - 1{,}340\right) - 5{,}2778544\, e^{-0{,}5536\,t}\sin\left(4{,}8332\,t - 1{,}340\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4{,}8332\,t - 1{,}340\right) + 8{,}7305\sin\left(4{,}8332\,t - 1{,}340\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\cos\left(4{,}8332\,t - 1{,}340 - \phi\right) = 0$$

Com: $A = \sqrt{1^2 + 8{,}7305^2} \cong 8{,}7876$

$$\phi = \arctan\frac{8{,}7305}{1} \cong 1{,}4568 \text{ rad}$$

Então:

$$8{,}7876\cos\left(4{,}8332\,t - 2{,}7968\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4{,}8332\,t - 2{,}7968 = \frac{\pi}{2} + k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

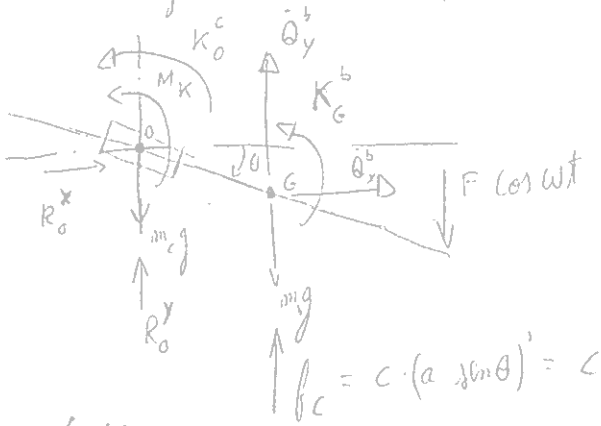
$$\Rightarrow t \cong 0{,}904 + k0{,}65 \;,\; k \in \mathbb{Z}$$

Logo, o instante em que N atinge o deslocamento máximo é:

$t = 0{,}904 - 0{,}65 \cong 0{,}254$ s $\rightarrow \theta|_{t=0{,}254} \cong 0{,}943$ rad

Aula TP - 4

1) Diagrama de corpo livre:



Pelo ex. anterior:

$$\vec{K}_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -a^2 m\ddot{\theta} - \frac{1}{12} m l^2 \ddot{\theta} - J_0^c \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$M_K = K_t\left(\theta(t) + \frac{mga}{K_t}\right)$$

Então:

$$-\left(\frac{l}{2}+a\right) F\cos\omega t + K_t\left(\theta(t) + \frac{mga}{K_t}\right) - mga\underbrace{\cos\theta}_{\approx 1} + ca^2\dot{\theta} =$$

$$= -a^2 m\ddot{\theta} - \frac{1}{12} m l^2 \ddot{\theta} - J_0^c\ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2 m + \frac{1}{12} m l^2 + J_0^c\right)\ddot{\theta}(t) + (ca^2)\dot{\theta}(t) + K_t\cdot\theta(t) = \left(\frac{l}{2}+a\right) F\cos\omega$$

b) $\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$

$\hookrightarrow \theta_p(t) = \Theta(\omega)\cos(\omega t - \phi)$

$$\Theta(\omega) = \frac{\Theta_S = \frac{F_{eq}}{K_t}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad ; \quad \phi = \arctan\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c\,a^2}{2\,m_{eq}\,\omega_n}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}0845 + 1(6)}} \cong 4{,}86384 \ \text{rad/s}$$

$$\xi = \frac{6{,}5 \times 0{,}12^2}{2 \times 0{,}0845 + 1(6) \times 4{,}86384} \cong 0{,}1138$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad ?$$

mas:

$$\phi = \arctan \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \Rightarrow \frac{135\,\pi}{180} = \arctan \frac{2 \times 0{,}1138 \cdot \beta}{1-\beta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta \cong 1{,}1203 \rightarrow \boxed{\omega \cong 5{,}4488 \ \text{rad/s}}$$

$$\Theta(\omega) = \frac{\left(\frac{l}{2} + a\right) F}{k_t} \Big/ \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \cong \boxed{0{,}5130\,F}$$

c) $f_c(t) = c \cdot a \cdot \dot{\theta}$

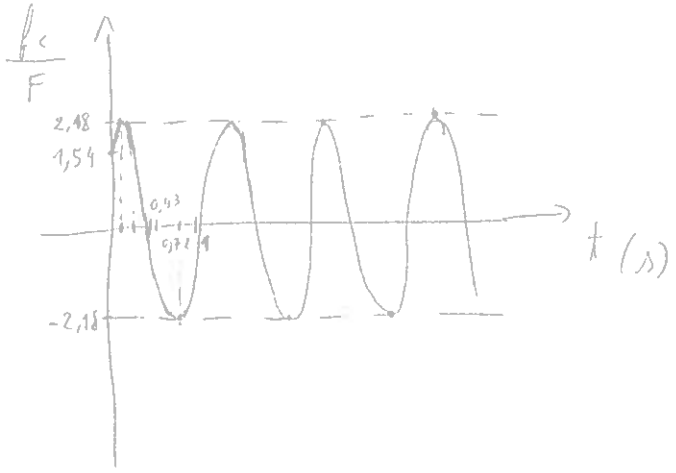
Se desprezarmos a parte homogénea da solução (regime harmónico livre amortecido) considerando regime permanente:

$$\theta(t) \cong 0{,}5130\,F \cos(5{,}4488\,t - 2{,}3562)$$

Logo:

$$\dot{\theta}(t) \cong -2{,}7952\,F \operatorname{sen}(5{,}4488\,t - 2{,}3562)$$

Então: $f_c(t) = -2{,}1803\,F \operatorname{sen}(5{,}4488\,t - 2{,}3562)$



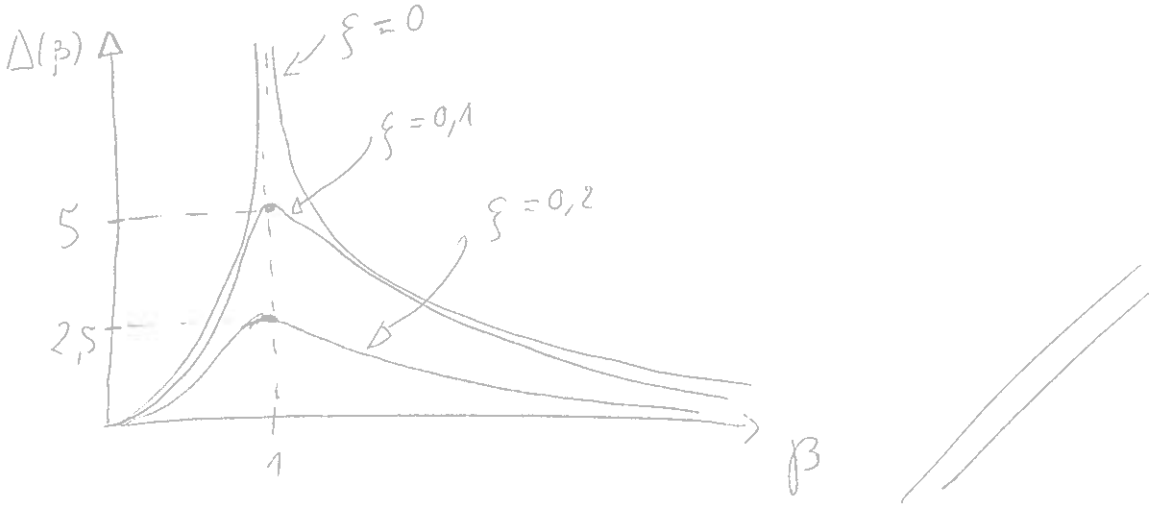
d)

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\left(\frac{l}{2}+a\right)F}{k_t} \frac{w \operatorname{sen}(wt-\phi)}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$f_c(t) = -\underbrace{\frac{c\cdot a}{k_t}\left(\frac{l}{2}+a\right) F w \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}}_{\text{Amplitude} = F_c} \cdot \cos(wt-\phi)$$

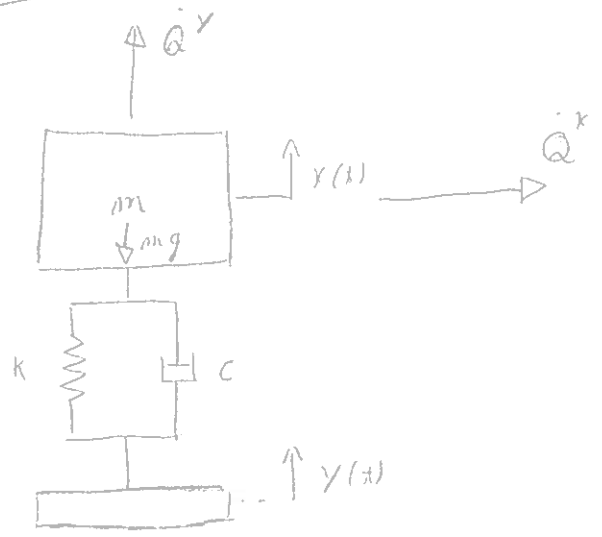
$$F_c = -\frac{ca}{k_t}\left(\frac{l}{2}+a\right) F \cdot \frac{w_n \cdot \frac{w}{w_n}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = \beta$$

$$= -\underbrace{\frac{ca}{k_t}\left(\frac{l}{2}+a\right) F \cdot w_n}_{\text{constante}} \cdot \underbrace{\frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}}_{\text{termo adimensional}} \quad (\text{DELTA})$$



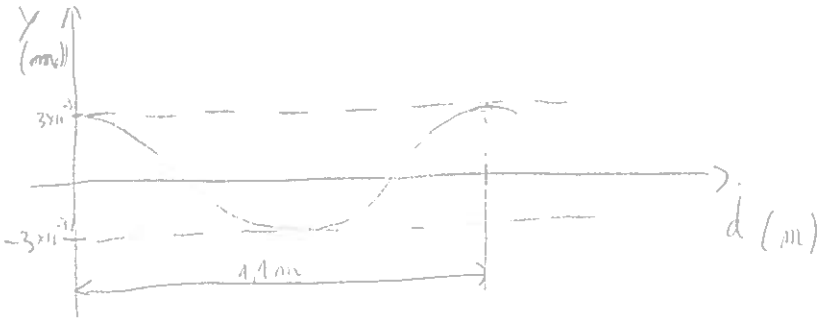
Aula TP - 5

1)



a)

$$y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$



$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{1,1}{17} \cong 0,064706 \text{ s} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \cong 97,104 \text{ rad/s}}$$

$$A = 3 \times 10^{-3} = 0,003 \text{ m}$$

Como: $y|_{t=0} = A \Rightarrow \phi = 0 \text{ rad}$

$$y(t) = 0,003 \cos(97,104 \cdot t)$$

b) $\ddot{Q}^y = m \ddot{x}(t)$

Eq. de movimento:

$$f_K = K \left[(x(t) - y(t)) - \underbrace{(x_{md} - y_{md})}_{3 \text{ mm}} \right]$$

Em eq. estático

$$K \cdot z_{est} = mg \Rightarrow z_{est} = \frac{mg}{K_{eq}}$$

$$f_c = c \cdot (\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) = c \cdot (\dot{x}(t) + Y \cdot w \, \underbrace{0{,}003}_{} \, \underbrace{97{,}104}_{} \, \text{sen}(wt - \phi))$$

Então:

$$-K[(x(t) - Y\cos(wt-\phi)) = \cancel{\frac{mg}{K_{eq}}}] - mg - c(\dot{x}(t) + Y w \text{sen}(wt-\phi$$

$$= m\ddot{x}(t) \Leftrightarrow m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k \cdot x(t) = KY\cos(wt-\phi) -$$

$$- cYw\,\text{sen}(wt-\phi) \Leftrightarrow m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + kx(t) =$$

$$= Y\sqrt{k^2 + c^2w^2} \cdot \cos(wt - \phi + \gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0{,}003 \cdot \sqrt{(5{,}25\times10^6)^2 + (20\times10^3 \times 97{,}104)^2} \times$$

$$\times \cos\left(97{,}104 \cdot t - 0 + \arctan\frac{\overbrace{wc}^{20\times10^3}}{\underbrace{K}_{5{,}25\times10^6}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{500\ddot{x}(t) + 20\times10^3\dot{x}(t) + 5{,}25\times10^6 x(t) \cong 16\,793{,}1\cos(97{,}104t + 0{,}3543)}$$

c) $TR_{abs} = \frac{X(w)}{Y} = ?$

Determinação da Resposta Estacionária:

$$x_p(t) = X(w)\cos(wt - \psi)$$

com: $X(w) = Y\frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$; $\psi = \arctan\frac{2\xi\beta^3}{1-\beta^2+(2\xi\beta)^2}$

$$\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{20 \times 10^3}{2 \times 500 \times \sqrt{\frac{5,25 \times 10^6}{500}}} \cong 0,19518$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{5,25 \times 10^6}{500}} \cong 102,470 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{97,104}{102,470} \cong 0,9476$$

Assim: $$X(\omega) = 0,003 \times \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0,19518 \times 0,9476)^2}}{\sqrt{(1 - 0,9476^2)^2 + (2 \times 0,19518 \times 0,9476)^2}} \cong 0,008358$$

$$\psi = \arctan \frac{2 \times 0,19518 \times 0,9476^3}{1 - 0,9476^2 + (2 \times 0,19518 \times 0,9476)^2} \cong 0,9473 \text{ rad}$$

$$x_p(t) = 0,008336 \cos(97,104\,t - 0,9473)$$

$$TR_{abs} = \frac{X(\omega)}{Y} = \frac{0,008358}{0,003} \cong 2,779$$

$$TR_{rel} = \frac{Z(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cong 2,340$$

d) Se considerarmos só a resposta estacionária:

$$x_p(t) = 0,008336 \cos(97,104\,t - 0,9473) \quad [m]$$

e) $$f_T(t) = f_k(t) + f_c(t) = -k(x(t) - y(t)) - c(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) =$$

$$= -5,25 \times 10^6 \cdot \left(0,008336 \cos(97,104\,t - 0,9473) - 0,003 \cos(97,104\,t)\right) -$$

$$- \; 20 \times 10^3 \cdot \left(-0{,}80946 \, \text{sen}(97{,}104 t - 9{,}9473) + 0{,}291312 \, \text{sen}(97{,}104 t) \right) =$$

$$= -43764 \cos(97{,}104 t - 0{,}9473) + 16189{,}2 \, \text{sen}(97{,}104 t - 0{,}9473) +$$

$$+ 15750 \cos(97{,}104 t) - 5826{,}24 \, \text{sen}(97{,}104 t)$$

Mas repare-se que:

$$f_T(t) = -K(x(t) - y(t)) - C(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) = \boxed{m \ddot{x}(t)}$$

Que é mais simples de calcular:

$$f_T(t) = 500 \cdot \left(-0{,}008336 \times 97{,}104 \times 97{,}104 \cos(97{,}104 t - 0{,}9473) \right) \Leftrightarrow$$

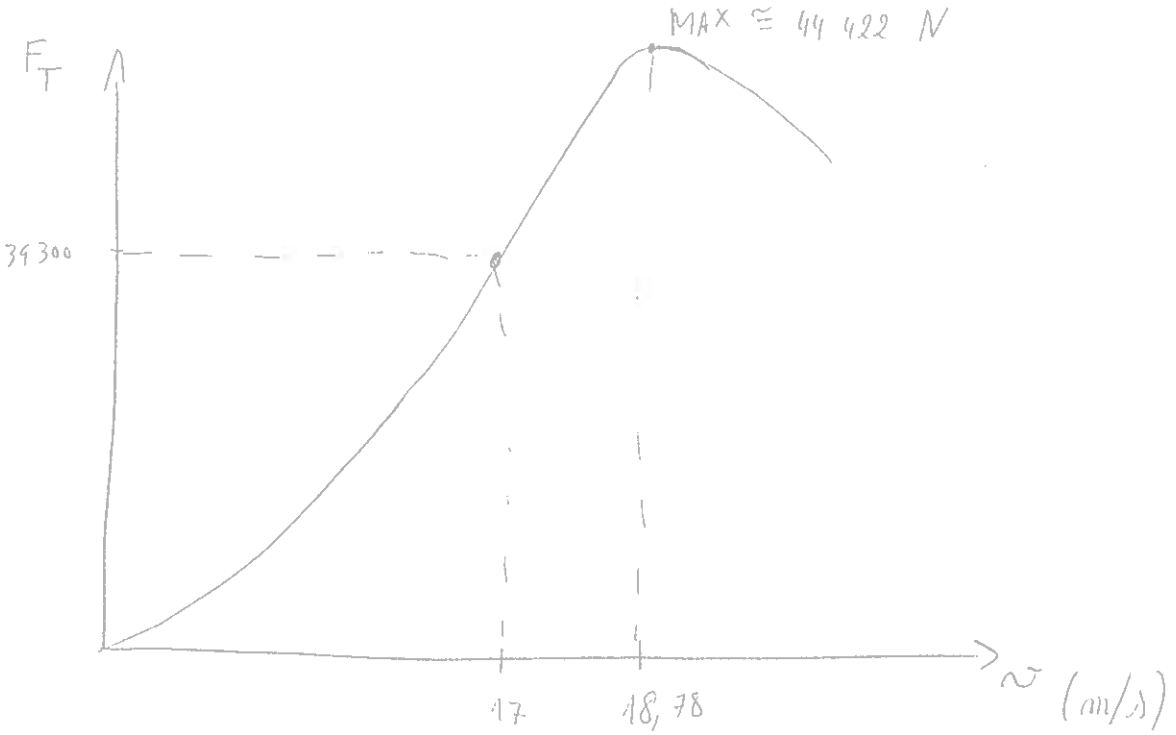
$$\Leftrightarrow f_T(t) = \underbrace{-39300{,}85}_{F_T} \cos(97{,}104 t - 0{,}9473)$$

$$F_T = X(w) \cdot m \cdot w^2 = Y \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} m \cdot w^2$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda w}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{v \cdot 2\pi}{\lambda}$$

Logo:

$$\boxed{F_T = 0{,}003 \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(2 \times 0{,}19518 \cdot \frac{v \cdot 2\pi}{1{,}1 \times 102{,}470}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2 \cdot 4\pi^2}{1{,}1^2 \times 102{,}470^2}\right)^2 + \left(2 \times 0{,}19518 \times \frac{v \cdot 2\pi}{1{,}1 \times 102{,}470}\right)^2}} \times 500 \times \frac{v^2 \cdot 4\pi^2}{1{,}1^2}}$$



f) $$\beta_n = \frac{1}{2\xi}\left[\sqrt{1+8\xi^2}-1\right]^{1/2} \cong 0{,}9662 \text{ rad/s}$$

$$v_n = \frac{\lambda\,\omega_n}{2\pi} = \frac{\lambda\cdot\beta_n\cdot\omega_m}{2\pi} = \frac{1{,}1\times 0{,}9662\times 102{,}470}{2\pi} \cong 17{,}33$$

g) $$\left(TR_{abs}\right)_{\text{sin amort.}} = \left(TR_{abs}\right)_{\text{con amort.}} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \cong 2{,}779 \Rightarrow$$

($\xi = 0$ en el numerador; $\xi = 0$ en el denominador)

$$\Rightarrow \beta_1 \cong 0{,}8001 \;\vee\; \beta_2 = 1{,}1661 \text{ rad/s}$$

$$v_1 = \frac{\lambda\cdot\beta\cdot\omega_m}{2\pi} = \frac{1{,}1\times 0{,}8001\times 102{,}470}{2\pi} \cong \boxed{14{,}35 \text{ m/s}}$$

$$v_2 = \frac{1{,}1\times 1{,}1661\times 102{,}470}{2\pi} \cong \boxed{20{,}92 \text{ m/s}}$$

h) $$\left(TR_{abs}\right)_{\text{sin amort.}} = \frac{X(w)}{Y} < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} < 1 \Rightarrow$$

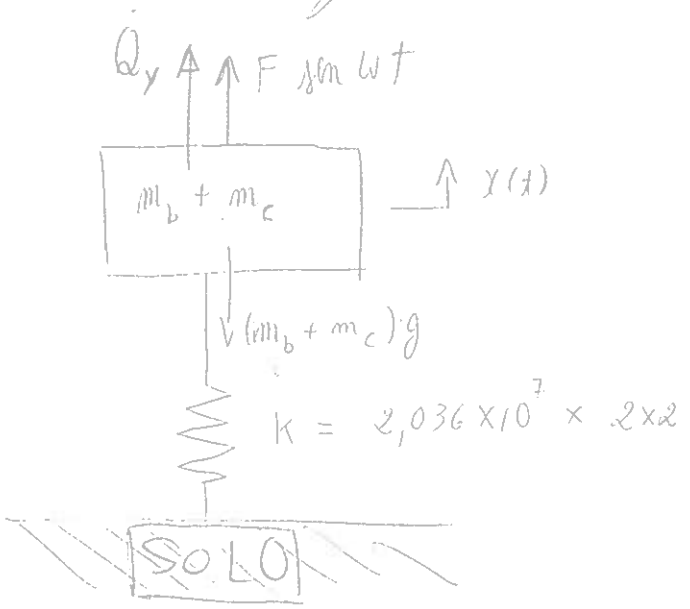
($\xi = 0$ en el numerador; $\xi = 0$ en el denominador)

$\Rightarrow \quad \beta > 1{,}4142 \ \ rad/s$

$$v = \frac{\lambda \beta \cdot \omega_m}{2\pi} = \frac{1{,}1 \times 1{,}4142 \times 102{,}470}{2\pi} \cong 25{,}37 \ m/s$$

$$\boxed{v > 25{,}37 \ m/s}$$

2)



$$\omega = \frac{1800}{60} \cdot 2\pi \cong 188{,}496 \ rad/s$$

$$F \sin \omega t - \left(2402 \times 2 \times 2 \cdot h + 934 \right) \cdot 9{,}81 - k \cdot (x(t) - y_{md}) =$$

$$= \left(2402 \times 2 \times 2 \times h + 934 \right) \ddot{y}(t)$$

Na situação estática:

$$-k \left(0 - y_{md} \right) - \left(2402 \times 2 \times 2 \cdot h + 934 \right) \cdot 9{,}81 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{md} = + \frac{(2402 \times 2 \times 2 \cdot h + 934) \cdot 9{,}81}{k}$$

Portanto, a eq. de movimento fica:

$$(9608 \cdot h + 934)\ddot{x}(t) + K \cdot x(t) = F \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$TR_{abs} = \frac{F_T}{F} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0{,}75 \qquad (1)$$

($\xi = 0$)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{2{,}036 \times 10^7 \times 2 \times 2}{9608\,h + 934}}$$

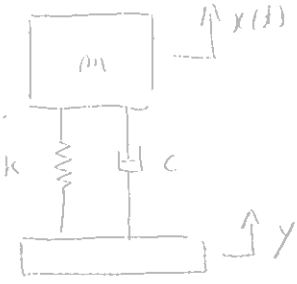
$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{188{,}496}{\omega_n}$$

Substituindo β e ω_n em (1):

$$\boxed{h \cong 0{,}4594\ m}$$

Sugestão de Trabalho Extra.

1)



$$\ddot{z}(t) = \ddot{x}(t) - \ddot{y}(t) + \ddot{y}(t)$$

$$-K \cdot (\underbrace{x(t) - y(t)}_{z(t)}) - c(\underbrace{\dot{x}(t) - \dot{y}(t)}_{\dot{z}(t)}) = m\ddot{x}(t) \iff$$

$$\iff m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + Kz(t) = -m\ddot{y}(t) \iff$$

$$\Leftrightarrow \quad m \cdot \ddot{z}(t) + C \cdot \dot{z}(t) + K \cdot z(t) = -m\left(-\omega^2 Y \operatorname{sen}\omega t\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m\,\ddot{z}(t) + C\,\dot{z}(t) + K\,z(t) = m\,\omega^2 Y \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

a) A solução da resposta estacionária ou permanente:

$$z(t) = \frac{Y}{K} \frac{\omega^2 m}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

$$\text{Com} \quad \phi = \arctan \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{40}{8} = 5 \quad , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \Leftrightarrow K = m \cdot \omega_n^2 = 64\,m$$

$$\xi = \frac{C}{C_c} = 0{,}2$$

Então:

$$z(t) = \underbrace{\frac{Y}{64\,\text{Nm}} \frac{1600 \cdot \text{Nm}}{\sqrt{(1-5^2)^2 + (2\times 0{,}2\times 5)^2}}}_{Z(\omega)} \cos\left(40t - \frac{\pi}{2} + 0{,}0831\right)$$

Como: $\quad Z(\omega) = \frac{0{,}008}{2} = 0{,}004\ \text{m} \Rightarrow 0{,}004 = \frac{Y}{64} \cdot \frac{1600}{\sqrt{(1-5^2)^2 + (2\times 0{,}2\times 5)^2}}$

$$\Leftrightarrow Y \cong 0{,}003853\ \text{m} \cong 3{,}85\ \text{mm}$$

b) $\quad \text{Erro} = \frac{|4-3{,}85|}{3{,}85} \times 100 \cong 3{,}9\ \%$

c) Como vimos:

$$Y = Z \cdot \frac{k\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}{\omega^2 m}$$

Como $k = m\,\omega_n^2$:

$$Y = Z \cdot \frac{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}{\beta}$$

O objetivo, neste caso, é igualar Y com Z.

Portanto: $\dfrac{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}{\beta} = 1 \iff$

$\iff (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 = \beta^2 \iff 2\xi\beta = \sqrt{\beta^2 - (1-\beta^2)^2} \iff$

$\iff \xi = \dfrac{\sqrt{\beta^2 - (1-\beta^2)^2}}{2\beta}$

Logo, se mantivermos $\beta = 5$:

$$\xi = \not{\exists} \text{ impossível}$$

Não é possível eliminar o erro. Mas é possível minimizá-lo:

$$\text{Erro} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}{\beta} - 1$$

Mantendo $\beta = 5$:

$$\frac{d}{d\xi}(\text{Erro}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\chi} \frac{2(2\xi\beta)\chi\beta \cdot \left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{-1/2}}{\beta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\xi\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0 \Rightarrow \xi = 0$$

Portanto, o erro será mínimo para $\xi = 0$, mantendo a mesma razão de frequências (e baixa consoante a diminuição de ξ)

Por outro lado, se mantivermos $\xi = 0{,}2$:

$$\frac{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\times 0{,}2\cdot\beta)^2}}{\beta} = 1 \Rightarrow \beta_1 \cong 0{,}6417 \quad \vee \quad \beta = 1{,}5583$$

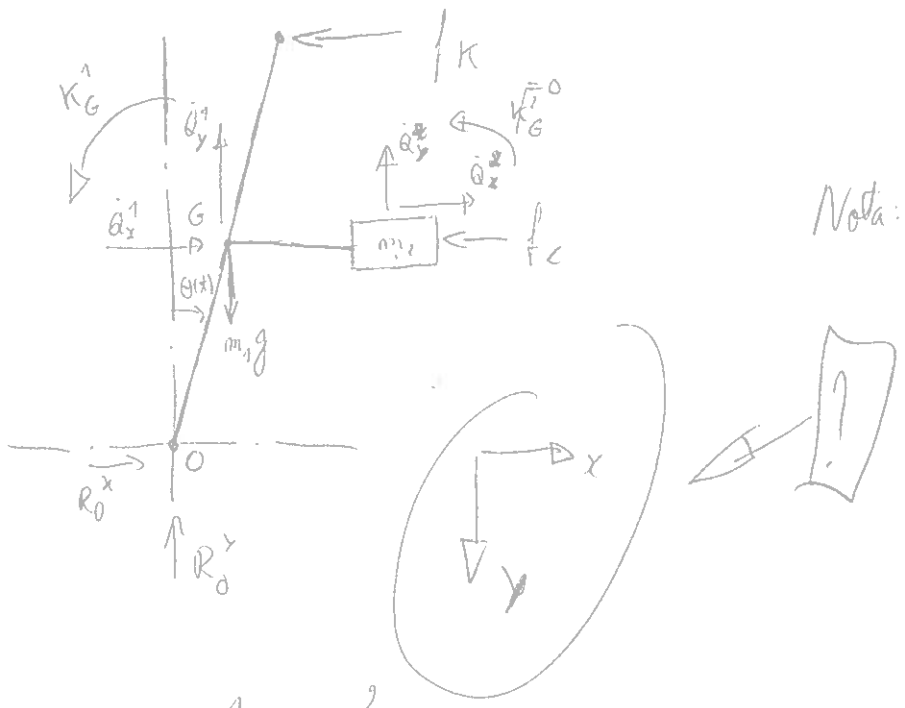
Para estes valores de β o Erro é eliminado!

Portanto, basta fazer com que:

$$\begin{cases} \frac{40}{\omega_n} \cong 0{,}6417 \Leftrightarrow \omega_n \cong 62{,}3344 \text{ rad/s} \\ \frac{40}{\omega_n} \cong 1{,}5583 \Leftrightarrow \omega_n \cong 25{,}6690 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Como: $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ Agora é "jogar" com os valores de K e de m de forma a aproximar ω_n de 1 destes valores calculados

2)



Nota: O peso da massa 2 não aparece porque esta está apoiada.

$$\Sigma M_0 = K_0^1 + K_0^2$$

$$\vec{K}_0^1 = \vec{K}_G^1 + \vec{OG} \times \vec{Q}^1$$

$$\vec{OG} = \begin{vmatrix} a \sin\theta \\ -a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} a\theta \\ -a \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{Q}^1 = m_1 \begin{vmatrix} a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{Q}^1 = m_1 \begin{vmatrix} a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_G^1 = \vec{H}_{G/0}$$

$$\vec{H}_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G\dot{\theta} \end{vmatrix}$$

$I_{zz} = J_G$

$$\vec{K}_G^1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G\ddot{\theta} \end{vmatrix} \rightarrow \vec{K}_0^1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G\ddot{\theta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a\theta \\ -a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a m_1 \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{K}_0^1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G\ddot{\theta} + a^2 m_1 \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_O^2 = ?$$

$$\vec{K}_{G_2}^2 = \vec{0}$$

$$\vec{OG}_2 = \begin{vmatrix} a \operatorname{sen}\theta + x_0 \\ -a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} a\theta + x_0 \\ -a \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{Q}^2 = m_2 \begin{vmatrix} a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\dot{Q}}^2 = \begin{vmatrix} a\ddot{\theta}\, m_2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_O^2 = \vec{0} + \begin{vmatrix} a\theta + x_0 \\ -a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a\ddot{\theta}\, m_2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 m_2 \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_O^1 + \vec{K}_O^2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G\ddot{\theta} + a^2 m_1\ddot{\theta} + a^2 m_2\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Eq. diferencial:

$$-(a+b)\left[k\left((a+b)\underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\approx\theta} - S\cos\omega t\right)\right] - a\left\{C\cdot\frac{d}{d\theta}\left[a\underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\approx\theta}\right]\right\} +$$

$$+ m_1 g \cdot a \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\approx\theta} = \left(J_G + a^2 m_1 + a^2 m_2\right)\ddot{\theta} \quad (\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(J_G + a^2 m_1 + a^2 m_2\right)\ddot{\theta}(t) + (C\cdot a^2)\dot{\theta}(t) + \left[k(a+b)^2 - m_1 g a\right]\cdot\theta(t) = \left[k(a+b)S\right]\cos\omega t}$$

b) i c) $\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c \cdot a^2}{2\, m_{eq}\, \omega_{n_1}} = \frac{175 \times 0{,}5^2}{2 \times (0{,}72 + 0{,}5^2 \times 18 + 0{,}5^2 \times 12) \times 21{,}5516}$ $\Leftrightarrow$

$\omega_n = \sqrt{\frac{2500 \times (0{,}5 + 0{,}75)^2 - 18 \times 9{,}81 \times 0{,}5}{0{,}72 + 0{,}5^2 \times 18 + 0{,}5^2 \times 12}} \simeq 21{,}5516$ rad/s

$\Leftrightarrow \boxed{\xi \simeq 0{,}12348}$

d) $F_{eq} = K(a+b)\,S$ i $\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \simeq 1{,}1662$ ($\omega = 8\pi$, $\omega_n \simeq 21{,}5516$)

$\theta_p(t) = \Theta(\omega)\cos(\omega t - \phi)$

$\Theta(\omega) = \frac{\Theta_s = \frac{F_{eq}}{K_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\frac{K(a+b)S}{K(a+b)^2 - m_1 g a}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} =$

$= \frac{\frac{2500 \times (0{,}5+0{,}75) \times 0{,}005}{2500 \times (0{,}5+0{,}75)^2 - 18 \times 9{,}81 \times 0{,}5}}{\sqrt{(1 - 1{,}1662^2)^2 + (2 \times 0{,}12348 \times 1{,}1662)^2}} \simeq 0{,}008878$ rad

A amplitude do movimento em G:

$X_G = a \cdot \operatorname{sen}\theta \simeq a\,\theta = 0{,}5 \times 0{,}008878 = 0{,}004439\ m \simeq$

$\simeq \boxed{4{,}44\ mm}$

e) $f_c = c \cdot \frac{d}{d\theta}\left[a \underbrace{\operatorname{sen}\theta(t)}_{\simeq \theta(t)}\right] \simeq c \cdot a \cdot \dot{\theta}(t) =$

$= c \cdot a \cdot \Theta(\omega) \cdot (-\omega)\operatorname{sen}(\omega t - \phi)$

$$\phi = \arctan \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)} = -0,6748 \text{ rad}$$

Logo:

$$f_c = -175 \times 0,5 \times 0,008878 \times 8\pi \operatorname{sen}(8\pi \cdot t + 0,6748) \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_c = -19,5237 \operatorname{sen}(8\pi t + 0,6748) \quad //$$

Aula TP-6

1)

$$f(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} F_p \cos(p\omega t - \psi_p)$$

$$F_0 = 0$$

$$F_p = \sqrt{A_p^2 + B_p^2}$$

$$A_p = \frac{2}{T} \int_{T/4}^{3T/4} \underbrace{f(t)}_{-F} \cdot \cos(p\omega t)\, dt + \frac{2}{T} \int_{3T/4}^{5T/4} \underbrace{f(t)}_{F} \cos(p\omega t)\, dt$$

$$= -\frac{2F}{T} \frac{1}{p\omega} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{p\omega 3T}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{p\omega T}{4}\right) \right) +$$

$$+ \frac{2F}{T} \frac{1}{p\omega} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{p\omega 5T}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{p\omega 3T}{4}\right) \right) =$$

$$= \frac{2F}{p\omega T} \operatorname{sen}\left(\frac{p\omega 5T}{4}\right) + \frac{2F}{p\omega T} \operatorname{sen}\left(\frac{p\omega T}{4}\right) - \frac{4F}{p\omega T} \operatorname{sen}\left(\frac{p\omega 3T}{4}\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Logo: $A_p = \frac{2F}{p\frac{2\pi}{\pi}\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{p\frac{2\pi}{\pi}5\pi}{4}\right) + \frac{2F}{p\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{p\frac{2\pi}{\pi}\pi}{4}\right) -$

$$- \frac{4F}{p\frac{2\pi}{\pi}\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{p\frac{2\pi}{\pi}3\pi}{4}\right) = \frac{F}{p\pi}\operatorname{sen}\left(\underbrace{p\cdot\frac{5\pi}{2}}_{p\frac{\pi}{2}+p2\pi}\right) + \frac{F}{p\pi}\operatorname{sen}\left(p\frac{\pi}{2}\right) -$$

$$- \frac{2F}{p\pi}\operatorname{sen}\left(p\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2F}{p\pi}\operatorname{sen}\left(p\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2F}{p\pi}\operatorname{sen}\left(p\frac{3\pi}{2}\right)$$

$B_p = 0$ ($f(x)$ é par e o sen é ímpar)

$$F_p = \sqrt{A_p^2 + B_p^2} = |A_p|$$

Como:

$$A_p = \begin{cases} \frac{4F}{p\pi}, & p = 1, 5, 9, \cdots \\ 0, & p = 2, 4, 6, 8, \cdots \\ -\frac{4F}{p\pi}, & p = 3, 7, 11, \cdots \end{cases}$$

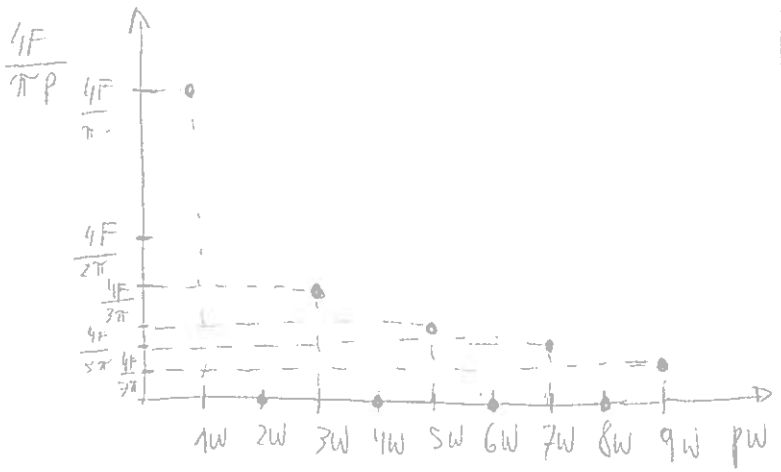
$$|A_p| = \begin{cases} \frac{4F}{p\pi}, & p = 1, 3, 5, 7, 9, \cdots \\ 0, & p = 2, 4, 6, 8, \cdots \end{cases}$$

$$\psi_p = \arctan \frac{B_p}{A_p} = \begin{cases} 0 & , \ p = 1, 5, 9, \ldots \\ \pi & , \ p = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$$

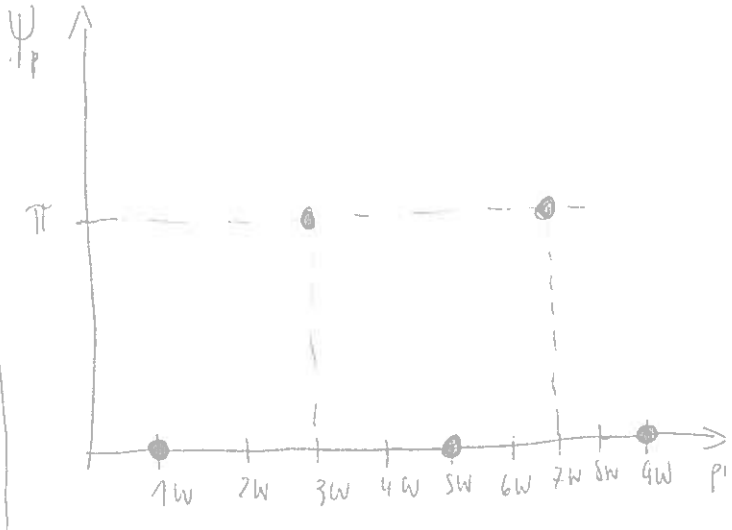
Portanto $f(t)$ fica:

$$f(t) = \frac{4F}{\pi}\cos(\omega t) + \frac{4F}{3\pi}\cos(3\omega t - \pi) + \frac{4F}{5\pi}\cos(5\omega t) + \frac{4F}{7\pi}\cos(7\omega t - \pi) + \frac{4F}{9\pi}\cos(9\omega t) + \ldots$$

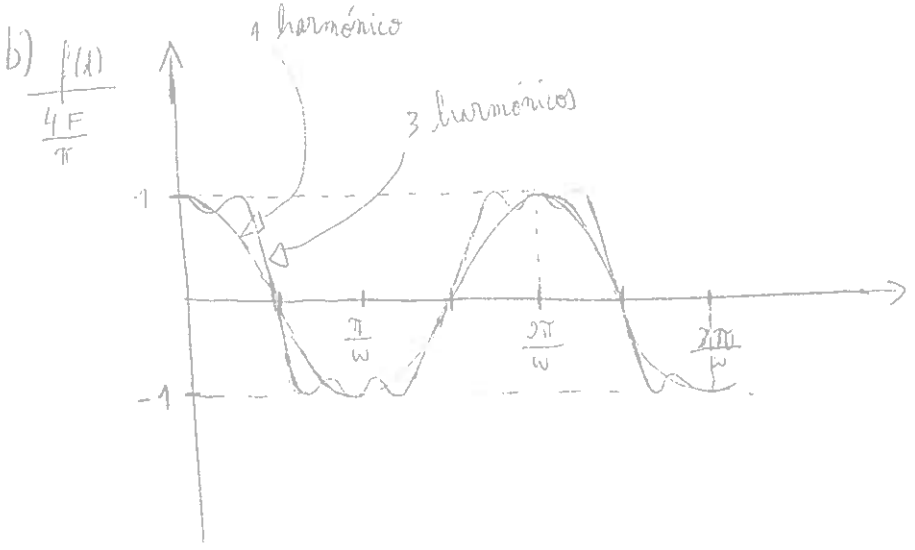
Espectro de Magnitude:



Espectro de fase:



b)



c) Espectros desenhados em a)

d)

$$m\,\ddot{y}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4F}{p\pi} \cos(p\omega t - \psi_p)$$

e) $$x(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{4F}{kp\pi}}{\sqrt{(1-\beta_p^2)^2 + (2\xi\beta_p)^2}} \cos(p\omega t - \psi_p - \phi_p)$$

Com: $\beta_p = p\beta$

$$\phi_p = \arctan \frac{2\xi\beta_p}{1-\beta_p^2}$$

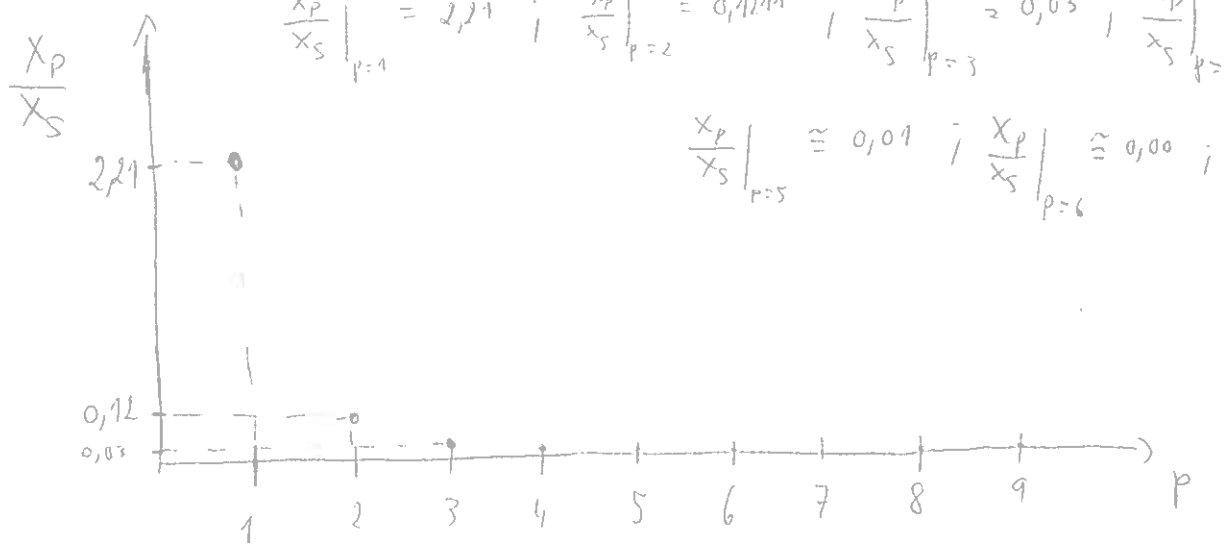
f) $$\frac{F_p}{F} = \frac{4}{p\pi} \quad ; \quad \frac{X_p}{X_s} = \frac{\frac{4k}{kp\pi}}{\frac{\sqrt{(1-\beta_p^2)^2 + (2\xi\beta_p)^2}}{k}} \iff$$

$$\iff \frac{X_p}{X_s} = \frac{4}{p\pi\sqrt{(1-\beta_p^2)^2 + (2\xi\beta_p)^2}}$$

i) $\omega_n = 0{,}8\,\omega \Rightarrow \beta = 1{,}25 \quad ; \quad \xi = 0{,}05$

$\left.\frac{X_p}{X_s}\right|_{p=1} \cong 2{,}21$; $\left.\frac{X_p}{X_s}\right|_{p=2} \cong 0{,}12$; $\left.\frac{X_p}{X_s}\right|_{p=3} \cong 0{,}03$; $\left.\frac{X_p}{X_s}\right|_{p=4} \cong 0{,}01$;

$\left.\frac{X_p}{X_s}\right|_{p=5} \cong 0{,}01$; $\left.\frac{X_p}{X_s}\right|_{p=6} \cong 0{,}00$; $\left.\frac{X_p}{X_s}\right|_{p=7\ldots9} = 0{,}00$

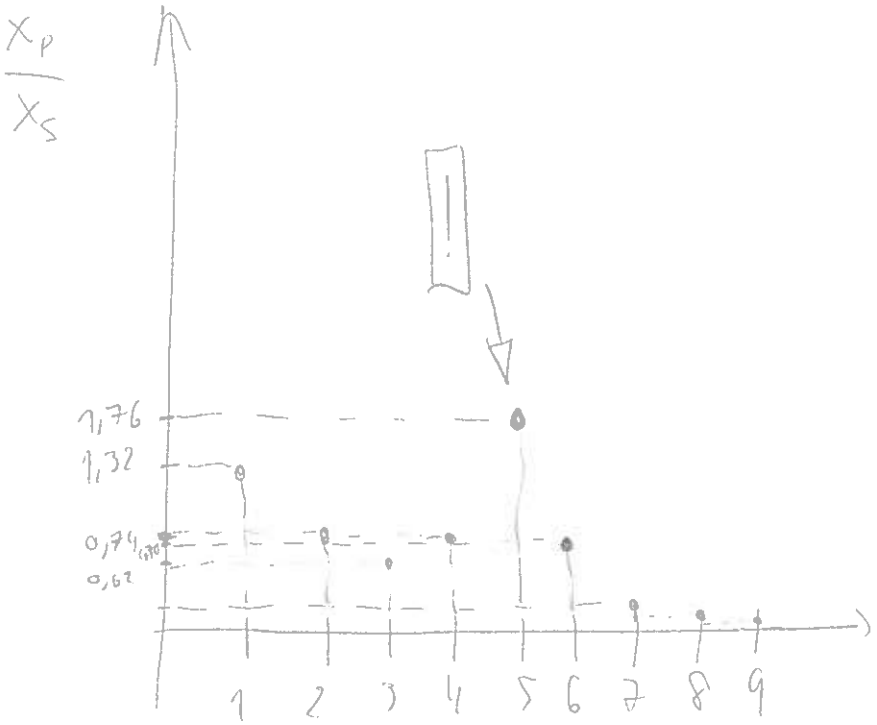


ii) $\beta \cong 0{,}18868$; $\xi = 0{,}05$

$\left.\frac{X_p}{X_S}\right|_{p=1} \cong 1{,}32$; $\left.\frac{X_p}{X_S}\right|_{p=2} \cong 0{,}74$; $\left.\frac{X_p}{X_S}\right|_{p=3} \cong 0{,}62$; $\left.\frac{X_p}{X_S}\right|_{p=4} \cong 0{,}73$;

$\left.\frac{X_p}{X_S}\right|_{p=5} \cong 1{,}76$; $\left.\frac{X_p}{X_S}\right|_{p=6} \cong 0{,}70$; $\left.\frac{X_p}{X_S}\right|_{p=7} \cong 0{,}24$; $\left.\frac{X_p}{X_S}\right|_{p=8} \cong 0{,}12$

$\left.\frac{X_p}{X_S}\right|_{p=9} \cong 0{,}07$



Comentário: No caso i) a frequência mais próxima da ressonância de amplitude é a do 1º harmónico, como tal é para esta frequência que se verifica mais amplitude de resposta. Mas no caso ii) é no 5º harmónico que a frequência se encontra próxima da ressonância, formando-o

o harmónico mais relevante, seguido do 1º harmónico. //

Aula TP - 7

1. $-k(x(t)-0) + f(t) = m\ddot{x}(t) \Leftrightarrow m\ddot{x}(t) + k\cdot x(t) = f(t)$

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \operatorname{sen}\omega\tau\; e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\operatorname{sen}\omega_d(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \left[\frac{F_0}{m\omega_n}\left[\frac{\operatorname{sen}\left((\omega+\omega_d)\cdot\tau - \omega_d\cdot t\right)}{2\times(\omega+\omega_d)} - \frac{\operatorname{sen}\left((\omega-\omega_d)\cdot\tau + \omega_d\cdot t\right)}{2\cdot(\omega-\omega_d)}\right]\right]_0^t$$

a) Limites de integração: $\int_0^t \ldots d\tau$

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_n}\left[\left(\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega+\omega_d} - \frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega-\omega_d}\right) - \left(\frac{\overbrace{\operatorname{sen}(-\omega_d t)}^{=-\operatorname{sen}(\omega_d t)}}{\omega+\omega_d} - \frac{\operatorname{sen}(\omega_d t)}{\omega-\omega_d}\right)\right] =$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_n}\left[\frac{(\omega-\omega_d)-(\omega+\omega_d)}{\omega^2-\omega_d^2}\cdot\operatorname{sen}\omega t - \left(\frac{-(\omega-\omega_d)-(\omega+\omega_d)}{\omega^2-\omega_d^2}\operatorname{sen}(\omega_d t)\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{F_0}{m\omega_n}\left[\frac{1}{\omega^2-\omega_d^2}\left(-\omega_d\operatorname{sen}(\omega_d t) + \omega\operatorname{sen}(\omega t)\right)\right]\right]; \quad 0 \le t \le t_c = \frac{\pi}{\omega}\,[s]$$

b) Limites de integração: $\int_0^{t_c} \ldots d\tau$

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_n^2}\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left((\omega+\omega_d)t_c - \omega_d t\right)}{\omega+\omega_d} - \frac{\operatorname{sen}\left((\omega-\omega_d)\cdot t_c + \omega_d t\right)}{\omega-\omega_d}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(-\frac{2\omega}{\omega^2-\omega_d^2}\operatorname{sen}(\omega_d t)\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_n}\left[\frac{\sin(\omega t_c + \omega_d(t_c - t))}{\omega + \omega_d} - \frac{\sin(\omega t_c - \omega_d(t_c - t))}{\omega - \omega_d} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\omega}{\omega^2 - \omega_d^2}\sin(\omega_d t)\right] = \frac{F_0}{2m\omega_d}\left[\frac{(\omega - \omega_d)(\sin\omega t_c \cos\omega_d(t_c - t) + \cos\omega t_c \sin\omega_d(t_c - t))}{\omega^2 - \omega_d^2}\right.$$

$$\left. - \frac{(\omega + \omega_d)(\sin\omega t_c \cos\omega_d(t_c - t) - \cos\omega t_c \sin\omega_d(t_c - t))}{\omega^2 - \omega_d^2} + \frac{2\omega}{\omega^2 - \omega_d^2}\sin\omega_d t\right] =$$

$$= \frac{F_0}{2m\omega_n}\left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_d^2}\left(\omega(2\cos\omega t_c \sin\omega_d(t_c - t)) - \omega_d(2\sin\omega t_c \cos\omega_d(t_c - t)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\omega \sin\omega_d t\right)\right] = \frac{F_0}{m\omega_n}\left\{\frac{1}{\omega^2 - \omega_d^2}\left[\omega(\cos\omega t_c \sin\omega_d(t_c - t) + \sin\omega_d t)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \omega_d \cdot \sin\omega t_c \cos\omega_d(t_c - t)\right]\right\} \quad , \quad t > t_c = \frac{\pi}{\omega} \ [s]$$

Se substituirmos $t_c = \frac{\pi}{\omega}$ e como $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi_0^2} \Rightarrow \omega_d = \omega_n$

$$x(t) = \left|\frac{F_0}{m\omega_n}\left\{\frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2}\left[-\omega \sin\omega_n\left(\frac{\pi}{\omega} - t\right) + \omega \sin\omega_n t\right]\right\}\right| \quad , \quad t > \frac{\pi}{\omega} \ [s$$

c) $T_n = 1\ s \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = 2\pi \ rad/s$

i) $\frac{t_c}{T_n} = t_c = 0{,}3\ s$

Fase II:

$$y(t) = \frac{F_0 \cdot \omega_n}{m\ \omega_n^2} \left\{ \dots \right\} \Rightarrow y(t) = \frac{F_0}{K} \left\{ \frac{\omega_n}{\omega^2 - \omega_n^2} \left[-\omega \operatorname{sen} \omega_n \left(\frac{\pi}{\omega} - t \right) + \omega \operatorname{sen} \omega_n t \right] \right\}$$

Logo:

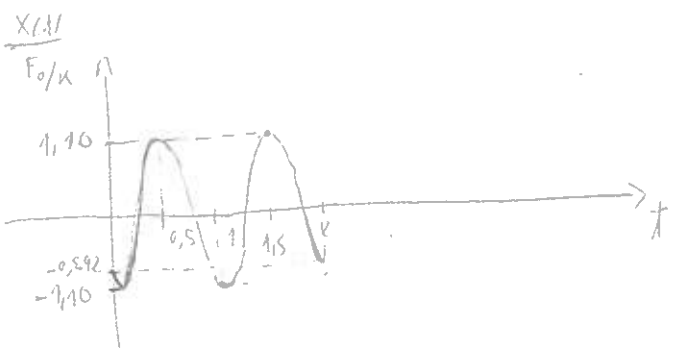
$$\frac{x(t)}{F_0/K} = \frac{\omega_n}{\omega^2 - \omega_d^2} \left(-\omega \operatorname{sen} \omega_n \left(\frac{\pi}{\omega} - t \right) + \omega \operatorname{sen} \omega_n t \right)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = 2\pi \ \text{rad/s}$$

$$\frac{x(t)}{F_0/K} = \frac{2\pi}{\omega^2 - 4\pi^2} \left(-\omega \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{\pi}{\omega} - t \right) + \omega \operatorname{sen} 2\pi t \right)$$

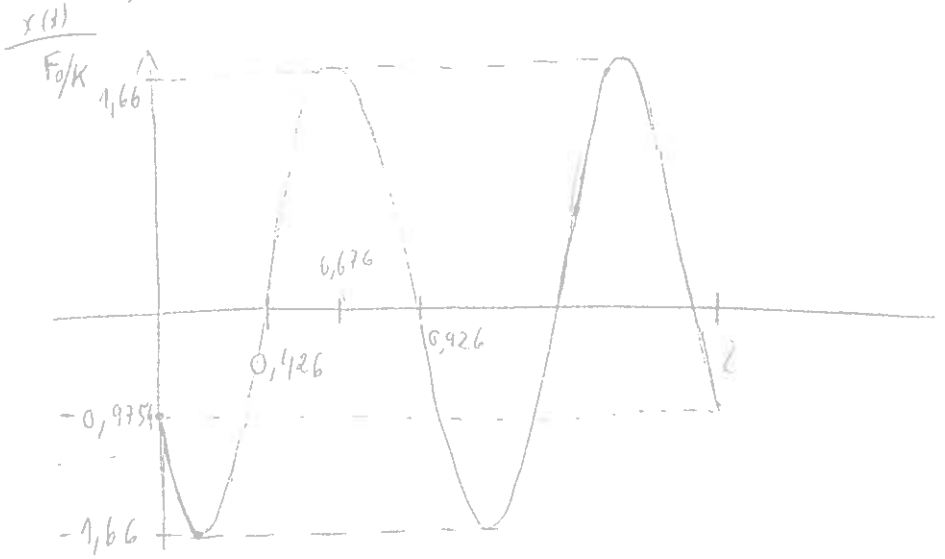
Como: $t_c = \frac{\pi}{\omega}$ e $t_c = 0{,}3 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{0{,}3}$

$$\frac{x(t)}{F_0/K} = \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{0{,}3}\right)^2 - 4\pi^2} \left(-\frac{\pi}{0{,}3} \operatorname{sen} 2\pi \left(0{,}3 - t \right) + \frac{\pi}{0{,}3} \operatorname{sen} 2\pi t \right)$$



ii) $t_c = 0,8\ s$

$$\frac{x(t)}{F_0/k} = \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{0,8}\right)^2 - 4\pi^2}\left(-\frac{\pi}{0,8}\sin 2\pi(0,8-t) + \frac{\pi}{0,8}\sin 2\pi t\right)$$



d)



$$\frac{x(t)}{F_0/k} = \frac{\frac{2\pi}{T_m}}{\left(\frac{\pi}{t_c}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T_m}\right)^2}\left(-\frac{\pi}{t_c}\sin\frac{2\pi}{T_m}(t_c - t) + \frac{\pi}{t_c}\sin\frac{2\pi}{T_m}t\right)$$

MATLAB ...

2) Eq diferencial do movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

- Condições iniciais:

$$t = 0: \quad x^0 = 0 \; ; \; \dot{x}^0 = 0$$

→ Cálculo da aceleração no instante $t = 0$:

$$\ddot{x}^0 = \frac{1}{m}\left(\underbrace{f^0}_{=0} - c\underbrace{\dot{x}^0}_{=0} - k\underbrace{x^0}_{=0}\right) = 0$$

→ Selecionar um passo de integração; $\Delta t = \frac{T_n}{10} < \frac{T_n}{\pi}$; e calcular as constantes de integração

$$a_0 = \frac{1}{(\Delta t)^2} \longrightarrow a_0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 100$$

$$a_1 = \frac{1}{2\Delta t} \longrightarrow a_1 = \frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)} = 5$$

$$a_2 = 2a_0 \longrightarrow a_2 = 200$$

$$a_3 = \frac{1}{a_2} \longrightarrow a_3 = 0{,}005$$

→ Calcular a resposta fictícia:

$$t = -\Delta t: \quad x^{-\Delta t} = \underbrace{x^0}_{=0} - \Delta t\cdot\underbrace{\dot{x}^0}_{=0} + a_3\underbrace{f^0}_{=0} \longrightarrow x^{-\Delta t} = 0$$

→ Calcular o termo de massa efectiva:

$$\bar{m} = a_0 m + a_1 c \rightarrow \bar{m} = 100\times 1 + 5\times\underbrace{\left(0{,}05\times\left(2\times 1\times\frac{2\pi}{1}\right)\right)}_{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{m} = 100 + \pi$$

Resposta:

$$x^{t+\Delta t} = \frac{f^t - (k - a_2 m)\, x^t - (a_0 m - a_1 c)\, x^{t-\Delta t}}{m}$$

Agora é aplicar o algoritmo: resposta fictícia

$$x^{0+\frac{1}{10}} = x^{0,1} = \frac{f^0 - (k - a_2 m)\, x^0 - (a_0 m - a_1 c)\, x^{-0,1}}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{0,1} = \frac{0 - \left(\left[\left(\frac{2\pi}{1}\right)^2 \cdot 1\right] - 200 \times 1\right) \times 0 - \left(100 \times 1 - 5 \times \left[0{,}05 \times \left(2 \times 1 \times \frac{2\pi}{1}\right)\right]\right) \times 0}{100 + \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{0,1} \cong 0$$

Sabendo que $f(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{t_{c1}} t, & t \leq t_{c1} \\ F_0, & t > t_{c1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}(3) \cdot t, & t \leq 3\,\text{s} \\ 1, & t > 3\,\text{s} \end{cases}$ [N]

$$x^{0,2} = \frac{0{,}0(3) - \left(\left[\left(\frac{2\pi}{1}\right)^2 \cdot 1\right] - 200\right) \times 0 - \left(100 \times 1 - 5 \times \left[0{,}05 \times \left(2 \times 1 \times \frac{2\pi}{1}\right)\right]\right) \cdot 0}{100 + \pi} \cong$$

$$\cong 0{,}0003232 \text{ m} \approx 0{,}32 \text{ mm}$$

$$x^{0,3} = \frac{\frac{1}{3} \times 0{,}2 - \left(4\pi^2 - 200\right) \times 0{,}0003232 - \left(100 - \pi\right) \times 0}{100 + \pi} \cong 0{,}001149 \text{ m}$$

$$x^{0,4} = \frac{\frac{1}{3} \times 0{,}3 - \left(4\pi^2 - 200\right) \times 0{,}001149 - \left(100 - \pi\right) \times 0{,}0003232}{100 + \pi} \cong 0{,}002455 \text{ m}$$

$$\vdots$$

$$x^{12} = \frac{f^{11,9} - \left(4\pi^2 - 200\right) \cdot x^{11,9} - \left(100 - \pi\right) \cdot x^{11,8}}{100 + \pi}$$

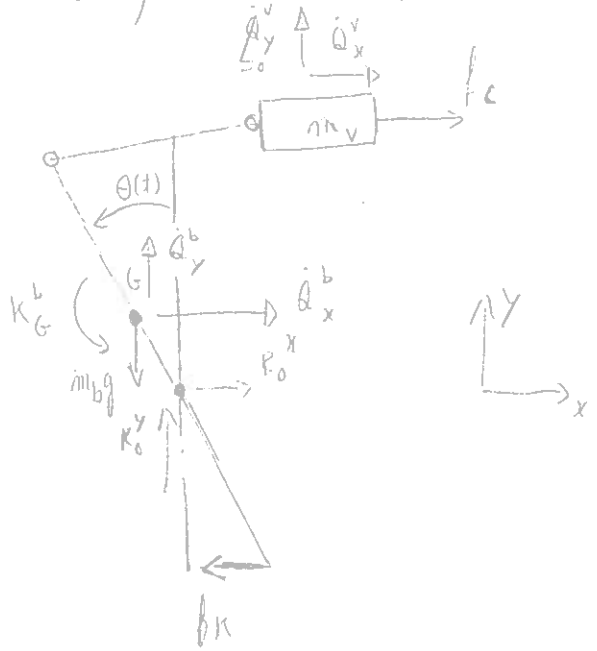
(21)

FIM DA MATÉRIA PARA O 1º TESTE

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1)

a) Diagrama de Corpo Livre



Vária-tela:

$$\vec{OV} = \begin{vmatrix} x_o - 4a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 4a \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} x_o - 4a\theta \\ 4a \\ 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{Q}^v = m_v \begin{vmatrix} -4a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{Q}^v = \begin{vmatrix} -4a\,m_v\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_o^{\,v} = \vec{K}^v_{G_v} + \vec{OV} \times \vec{Q}^v = \begin{vmatrix} x_o - 4a\theta \\ 4a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -4a\,m_v\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +16a^2 m_v\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Barra:

$$\vec{OG} = \begin{vmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{Q}^b = m_b \begin{vmatrix} -a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{Q}^b = \begin{vmatrix} -a\,m_b\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{H}_G^{\,b} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} m_b l^2 \dot{\theta} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{K}_G^{\,b} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} m_b l^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_O^b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} m_b l^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a\, m_b \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} m_b l^2 \ddot{\theta} + a^2 m_b \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Força da mola:

$$\vec{f}_K = -K \cdot \left[\left(2a \sin\theta - s(t) \right) - 0 \right] \cong -K \left(2a\theta - s \right)$$

Força de amort.:

$$\vec{f}_c = c \cdot \frac{d}{d\theta} \left(r_0 - 4a \sin\theta \right) = c \left(4a \dot{\theta} \cos\theta \right) \approx c \left(4a \dot{\theta} \right)$$

Eq. diferencial do mov.

$$m_b g \cdot a \sin\theta - 2a \cos\theta \cdot \left(K(2a\theta - s) \right) - 4a \left(c \cdot 4a \dot{\theta} \right) = \frac{1}{12} m_b l^2 \ddot{\theta} +$$

$$+ a^2 m_b \ddot{\theta} + 16 a^2 m_v \ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[m_b \left(\frac{l^2}{12} + a^2 \right) + 16 a^2 m_v \right] \ddot{\theta}(t) + \left(16 a^2 c \right) \dot{\theta}(t) +$$

$$+ 2a K (2a\theta - s) - m_b g a \theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\left[m_b \left(\frac{l^2}{12} + a^2 \right) + 16 a^2 m_v \right]}^{m_{eq}} \ddot{\theta}(t) + \underbrace{\left(16 a^2 c \right)}_{c_{eq}} \dot{\theta}(t) + \underbrace{\left(4a^2 K - m_b g a \right)}_{K_{eq}} \theta(t) =$$

$$= \underbrace{(2aK)}_{F_{eq}} s(t)$$

b) $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$

Para a eq. dif. apresentada para esta alínea:

$K_{eq} = 10 \quad N/m/rad \quad ; \quad m_{eq} = 0,12346 \quad Kg \cdot m^2$

$\omega_n = \sqrt{\frac{10}{0,12346}} \cong 9,0 \quad rad/s$

c) $\xi = \frac{C_{eq}}{C_c} = \frac{0,144}{2 \times 0,12346 \times 9,0} \cong 0,6480$

d) A resposta estacionária é:

$\theta_p(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$

com: $\Theta(\omega) = \frac{\frac{T_{eq}}{K_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\frac{125 \times 2 \times 10^{-3}}{10}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{13,5}{9,0}\right)^2\right)^2 + \left(2 \times 0,6480 \times \left(\frac{13,5}{9,0}\right)\right)^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Theta(\omega) \cong 0,01976 \quad rad$

$\phi = \arctan \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)} = \arctan \frac{2 \times 0,6480 \times \left(\frac{13,5}{9,0}\right)}{\left(1 - \left(\frac{13,5}{9,0}\right)^2\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \phi \cong -0,1543 \quad rad$

Amplitude do deslocamento da válvula:

$\Delta x_v = 2 \times \left[4a \sin(0,01976) \right] \cong 0,1581\, a \quad [m]$

e) A força transmitida à válvula é simétrica da força de amortecimento.

$$f_c^x = 4a\,C \cdot \dot{\theta}(t)$$

Mas como vimos em a): $C_{eq} = 4a\,(4a\,C)$

Como: $C_{eq} = 0{,}144 \Rightarrow f_c^x = \frac{0{,}144}{4a} \cdot \dot{\theta}(t) = \frac{0{,}036}{a} \cdot \dot{\theta}(t)$

Por outro lado: ($\dot{\theta}(t)$ calculado em d) para o mesmo $s(t)$)

$$\dot{\theta}(t) = -\theta \cdot w\,\mathrm{sen}(wt - \phi) = -0{,}01976 \times 13{,}5\,\mathrm{sen}(13{,}5t + 0{,}1543) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = -0{,}26676\,\mathrm{sen}(13{,}5t + 0{,}1573)$$

Conclui-se que: (a menos do sinal)

$$f_c^x = \frac{0{,}00960336}{a}\,\mathrm{sen}(13{,}5t + 0{,}1573)$$

Portanto, a amplitude da força transmitida à válvula é:

$$F = \frac{0{,}00960336}{a} \quad [N] \quad , \text{com } a \text{ em } [m]$$

f) $N(t + nT) = \frac{S}{T} \cdot t = \frac{S}{2{,}1244} \cdot t$

Logo: $f(t) = \frac{125 \cdot S}{T} \cdot t$

Para escrever $f(t)$ sob a forma de uma série de Fourier:

$$f(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(p\omega t) + \sum_{p=1}^{\infty} B_p \operatorname{sen}(p\omega t) =$$

$$= \frac{F_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} F_p \cos(p\omega t - \psi_p)$$

$$F_0 = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{125S}{T}\, t\, dt = \frac{250S}{T^2}\cdot\frac{T^2}{2} = 125S$$

$$A_p = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{125S}{T}\, t\cos(p\omega t)\, dt = \frac{250S}{T^2}\left[\frac{\cos(p\omega t)}{p^2\omega^2} + \frac{t\operatorname{sen}(p\omega t)}{p\omega}\right]_0^T$$

$$= \frac{250S}{T^2}\left[\frac{\cos(p\omega T)}{p^2\omega^2} + \frac{T\operatorname{sen}(p\omega T)}{p\omega} - \frac{1}{p^2\omega^2}\right]$$

Como $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$A_p = \frac{250S}{T^2}\left[\frac{\cos(2\pi p)}{p^2\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}} - \frac{1}{p^2\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}}\right] = \frac{62{,}5\cdot S}{p^2\cdot\pi^2}\cdot\left(\cos(2\pi\cdot p) - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A_p = 0}$$

$$B_p = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{125S}{T}\, t\operatorname{sen}(p\omega t)\, dt = \frac{250S}{T^2}\left[\frac{\operatorname{sen}(p\omega t)}{p^2\omega^2} - \frac{t\cdot\cos(p\omega t)}{p\omega}\right]_0^T$$

$$= \frac{250S}{T^2}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(p\frac{2\pi}{T}\cdot T\right)}{p^2\,\frac{4\pi^2}{T^2}} - \frac{T\cos\left(p\frac{2\pi}{T}\cdot T\right)}{p\frac{2\pi}{T}} - 0\right] =$$

$$= \frac{250S}{T^2}\left[\frac{T^2\cos(2\pi\cdot p)}{p\cdot 2\pi}\right] = \boxed{\frac{125S}{\pi p}}$$

Como :

$$F_p = \sqrt{A_p^2 + B_p^2} = |B_p| = \frac{125\,S}{p\,\pi}$$

$$\psi_p = \arctan \frac{B_p}{A_p} = \frac{\pi}{2}$$

Resposta estacionária só com (1) termo ($p = 1$):

$$\beta_p = p \cdot \beta \;\rightarrow\; \beta_1 = 1 \cdot \beta = \beta = \frac{\omega}{\omega_n} \;;\quad \xi = 0{,}6480 \;;\quad \omega = \frac{2\pi}{T} \cong 2{,}9576 \text{ rad/s}$$

($\omega_n \approx 9{,}0$; $T \approx 2{,}1244$)

$$\psi_p\Big|_{p=1} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \phi_p = \arctan \frac{2\xi p \beta}{1 - p^2\beta^2} \;\rightarrow\; \phi_{p=1} \cong 0{,}44545 \text{ rad}$$

($\beta \approx \frac{2{,}9576}{9{,}0}$)

Assim:

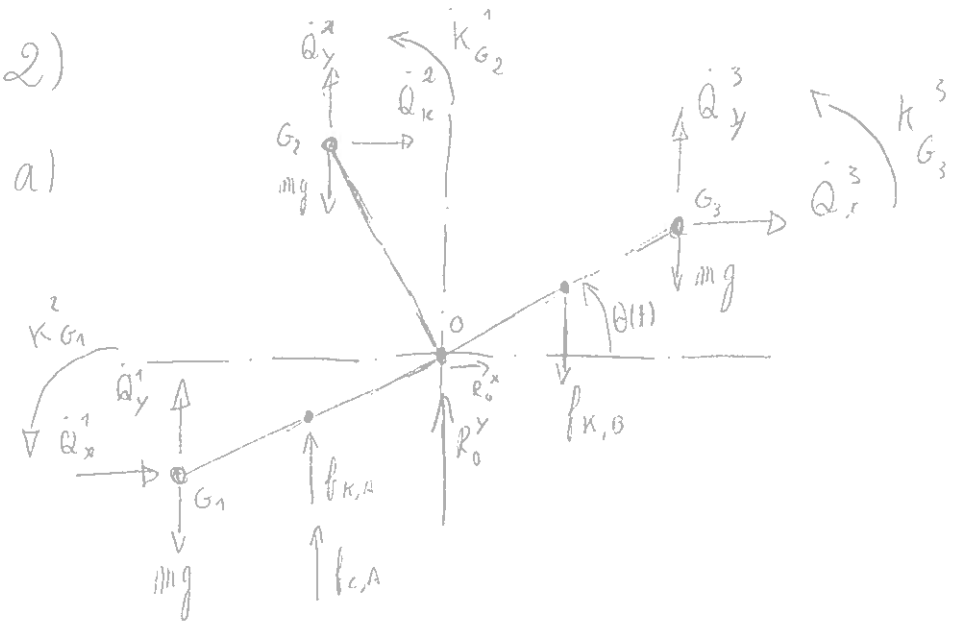
$$x(t) = \frac{62{,}5\,S}{K} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{125\,S}{p\,\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - p^2\beta^2)^2 + (2\xi p \beta)^2}} \cos(p\omega t - \psi_p - \phi$$

Truncando para $p = 1$:

$$x(t) = \frac{62{,}5\,S}{K} + \frac{125\,S}{\pi} \cdot 1{,}012 \cos(2{,}9576\,t - 1{,}1253)$$

2)

a)



$$\vec{OG_1} = \begin{vmatrix} -2a\cos\theta \\ -2a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{OG_2} = \begin{vmatrix} -2a\sin\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{OG_3} = \begin{vmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{H}_{G_1}^1 = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{H}_{G_2}^2 = \vec{H}_{G_3}^3$$

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} = 0$

$$\vec{Q}^1 = m\,\dot{\vec{OG_1}} \approx m \begin{vmatrix} 0 \\ -2a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{Q}^1 \approx \begin{vmatrix} 0 \\ -2am\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{Q}^2 \approx \begin{vmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{Q}^3 \approx \begin{vmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

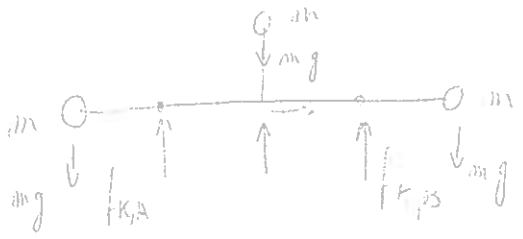
$$\vec{K}_0^1 = \underbrace{\vec{K}_G^1}_{=0} + \begin{vmatrix} -2a \\ -2a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_0^2 = \underbrace{\vec{K}_G^2}_{=0} + \begin{vmatrix} -2a\dot{\theta} \\ 2a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2am\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_0^3 = \underbrace{\vec{K}_G^3}_{=0} + \begin{vmatrix} 2a \\ 2a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Força das molas

Equilíbrio estático:



$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow f_{K,A} = f_{K,B} \Rightarrow k \cdot a \sin\tilde{\theta}_{m,d} = k\left(a \sin\tilde{\theta}_{m,d} - \Delta^{0}\right)$

Confirma-se o equilíbrio para qualquer $\theta_{m,d}$ (incluindo o $\theta_{m,d} = 0$ rad)

Força da mola B:

$$f^{Y}_{K,B} = -k\left[(a \sin\tilde{\theta}^{\theta} - \Delta) - (a \sin\phi_{m,d} - \chi_0)\right] = -k(a\theta - \Delta)$$

Força da mola A:

$$f^{Y}_{K,A} = k\left[(a \sin\tilde{\theta}^{\theta}) - (a \sin\phi_{m,d})\right] = k\,a\theta$$

Força do amort.:

$$f^{Y}_{C,A} = -C\,\frac{d}{d\theta}\left[-a \sin\tilde{\theta}^{\theta}\right] = C\,a\,\dot{\theta}$$

Eq. dif. do movimento:

$$mg\,2a\cos\theta - mg\,2a\cos\theta - mg\,2a\sin\theta - a\cos\theta\,(Ka\theta) -$$

$$- a\cos\theta\,(Ca\dot\theta) - a\cos\theta\,(K(a\theta - \Lambda)) = \left[4a^2 m\ddot\theta\right] \times 3 \iff$$

$$\iff \boxed{(12a^2 m)\ddot\theta(t) + (a^2 C)\dot\theta(t) + (2a^2 K - 2a\,mg)\theta(t) = (aK)\Lambda(t)}$$

b) $$\underbrace{0{,}015}_{m_{eq}}\ddot\theta(t) + \underbrace{0{,}0025\,C}_{C_{eq}}\cdot\dot\theta(t) + \underbrace{(0{,}005K - 0{,}4905)}_{K_{eq}}\cdot\theta(t) = \underbrace{0{,}05K}_{F_{eq}}\Lambda(t)$$

Pela figura:

$$T_d \cong 2 \times 0{,}3148 = 0{,}6296\ \Lambda \implies W_d = \frac{2\pi}{T_d} \cong 9{,}97965\ \text{rad}/\Lambda$$

Para determinar ξ usa-se o decremento logarítmico:

$$\ln\frac{\theta(t_1)}{\theta(t_i = t_1 + nT)} = \xi W_n T N \quad , \text{ com } W_d = W_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Da figura vê-se que o 4º ponto dos 3 homólogo do 2º, confirma-se:

$$1{,}49 - 0{,}2326 = N \cdot 0{,}6296 \implies N \cong 2 \quad \text{confirma-se!}$$

Então:

$$\ln\frac{0{,}1011}{0{,}05128} = \xi\cdot\left(\frac{9{,}97965}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot 0{,}6296 \cdot 2 \implies \xi \cong 0{,}05394$$

c) $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \Leftrightarrow \omega_n = \dfrac{9,97965}{\sqrt{1-0,05394^2}} \simeq 9,9942 \ \text{rad/s}$

d)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow 9,9942 = \sqrt{\frac{0,005 \cdot K - 0,4905}{0,015}} \Leftrightarrow K \simeq 397,75 \ N/m$$

e)

$$\xi = \frac{C_{eq}}{C_c} \Leftrightarrow 0,05394 = \frac{0,0025 \cdot C}{2 \times 0,015 \times 9,9942} \Leftrightarrow C \approx 6,4690 \ Ns/m$$

$C_c = 2 m_{eq} \omega_n$

f) Resposta livre amortecida:

$$\theta(t) = A\, e^{-\xi \omega_n t} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t - \phi\right)$$

com:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \xi \omega_n \theta_0}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}\right)^2 + \theta_0^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{\dot{\theta}_0 + \xi \omega_n \theta_0}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot \theta_0}$$

Sendo $\theta_0 = 0$; $\dot{\theta}_0 = ?$

Determinemos A:

$$A\, e^{-0,05394 \times 9,9942 \times 0,1525} = 0,1445 \Rightarrow A \approx 0,1569$$

Então:

$$0,1569 = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + 0}{9,9942 \times \sqrt{1-0,05394^2}}\right)^2 + 0} \Rightarrow \dot{\theta}_0 \simeq 1,5656 \ \text{rad/s} \ \vee$$

$\vee \ \dot{\theta}_0 \simeq -1,5656 \ \text{rad/s}$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

$$E_{dissipada\ amort.} = \Delta E_{mecânica} = \left(\cancel{E_{c_{final}}}^{=0} + \cancel{E_{p_{final}}}^{=0}\right) - \left(E_{c_{inicial}} + \cancel{E_{p_{inicial}}}^{=0}\right)$$

$$= -E_{c_{inicial}} = -\frac{1}{2} m_{eq} \left(\dot{\theta}_0\right)^2 = -\frac{1}{2} \times 0{,}015 \times 1{,}5656^2 \cong -0{,}01838$$

Conclui-se que o amortecedor dissipa cerca de $\boxed{18{,}4\ mJ}$

g) A resposta estacionária é:

$$\theta(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

$$\Theta(\omega) = \frac{\frac{F_{eq}}{\kappa_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\phi = \arctan \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)}$$

É imposto que: $\Theta(\omega) = \dfrac{0{,}01}{\underbrace{2a}_{0{,}05} \underbrace{(\sin\Theta(\omega)}_{\cong \Theta(\omega)})}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Theta(\omega) \cong 0{,}31623\ rad}$

$$0{,}31623 = \frac{\frac{0{,}05 \times 397{,}75 \times 5\times10^{-3}}{0{,}005 \times 397{,}75 - 0{,}4905}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \times 0{,}05394 \times \beta)^2}} \Rightarrow \beta_1 \cong 0{,}90225 \quad V$$

$$V \quad \beta_2 \cong 1{,}08365$$

Mas também é dito que $\phi > \frac{\pi}{2}$

$$\phi_1 = \arctan \frac{2 \times 0{,}05394 \times \beta_1}{1 - \beta_1^2} \Rightarrow \phi_1 \cong 0{,}482 \text{ rad} < \frac{\pi}{2}$$

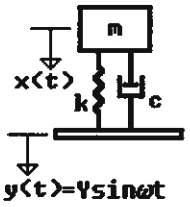
$$\phi_2 = \arctan \frac{2\xi\beta_2}{1-\beta_2^2} \cong -0{,}5908 \text{ rad} \rightarrow -0{,}5908 + \pi \cong 2{,}551 \text{ rad} > \frac{\pi}{2} \checkmark$$

Portanto a única razão de amortecimento que satisfaz ambas as condições: $\beta \cong 1{,}08365 \Rightarrow \frac{w}{w_n} = \beta \Rightarrow$ ($w_n = 9{,}9942$)

$$\boxed{w \cong 10{,}830 \text{ rad/s}}$$

FIM DA MATÉRIA PARA O 1º TESTE

1) (2 val)O sistema representado na figura está sujeito a um movimento harmónico da base.



a) (50%) Definir transmissibilidade absoluta TR_{abs} e representá-la graficamente em função da frequência de excitação ω e para 2 valores diferentes da razão de amortecimento ξ. Comentar e indicar eventuais pontos notáveis.

b) (50%) Definir transmissibilidade relativa TR_{rel} e representá-la graficamente em função da frequência de excitação ω e para 2 valores diferentes da razão de amortecimento ξ. Comentar e indicar eventuais pontos notáveis.

2) (1 val)Para um sistema vibratório com um grau de liberdade, amortecido e com condições iniciais nulas, caracterizar sucintamente a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

a) (25%) solicitação harmónica $f(t) = F \sin \omega t$;
b) (25%) solicitação periódica $f(t) = f(t+T)$;
c) (25%) solicitação impulsiva aplicada no instante $t = \tau$;
d) (25%) solicitação em "degrau" aplicada no instante $t = \tau$.

3) (1 val)A análise do comportamento dinâmico de um sistema assenta num modelo matemático desse sistema. Para um sistema amortecido com um grau de liberdade,

a) (60%) Definir e estabelecer a expressão da função de resposta em frequência de tipo receptância;

b) (40%) Representar graficamente a função de resposta em frequência mobilidade sob a forma do diagrama de Bode e do diagrama de Nyquist, indicando aspectos notáveis destas representações.

4) (1 val)Os transdutores de vibração permitem medir o deslocamento ou a aceleração do estado vibratório de um sistema mecânico.

c) (50%) Representar as características de transmissibilidade e indicar as gamas de frequência de funcionamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração;
d) (50%) Caracterizar, justificando, a frequência natural e o atravancamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

5) (2 val)O comportamento vibratório de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\} = \{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\} = \{\dot{x}\}_0$. A resposta do sistema pode ser determinada por integração directa das equações do movimento ou por análise modal.

a) (25%) Indicar a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal e o interesse desta técnica na determinação do regime forçado;
b) (25%) Justificar a utilização da análise modal truncada. Comentar a selecção dos modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada.
c) (25%) Em que condições os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para determinar o regime forçado do sistema amortecido? Demonstrar.
d) (25%) Indicar os pressupostos dos métodos de integração directa das equações diferenciais do movimento. Caracterizar o método das diferenças finitas como método de integração directa.

6) (1 val) Responder, em alternativa, à questão 6.1 ou 6.2.

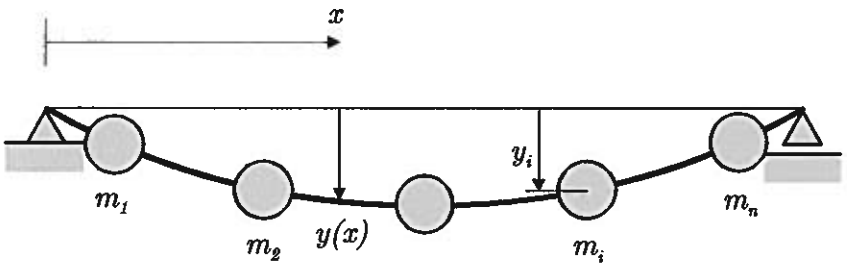
→

6.1) A equação diferencial do movimento axial forçado de uma barra (tracção-compressão) escreve-se como sendo $\rho A\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EA\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=f(x,t)$ **e as formas naturais de vibração são representadas pelas funções características** $U_r(x), r=1,\ldots,\infty$.

a) (40%) Escrever as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das formas naturais $U_r(x), r=1,\ldots,\infty$;

b) (60%) Demonstrar como a projecção da equação diferencial parcial na base modal ou natural conduz a um conjunto de equações diferenciais ordinárias independentes.

6.2) A figura representa a deformada estática $y(x)$ **de uma viga simplesmente apoiada sob a acção do peso próprio de uma série de massas concentradas** $m_i, i=1,\ldots,n$ **colocadas ao longo do comprimento** ℓ **da viga.**

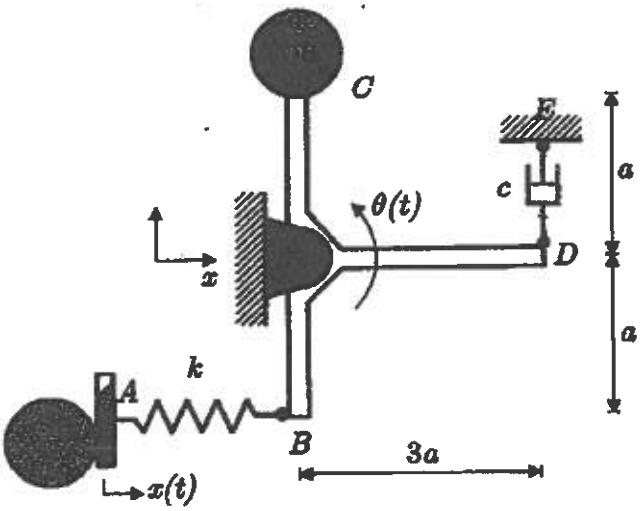


Admitindo a deformada estática como função de aproximação para a forma fundamental de vibração de flexão da viga, desprezando a massa da viga e utilizando o quociente de Rayleigh,

a) (100%) demonstrar que a estimativa da frequência fundamental de flexão é dada pela expressão

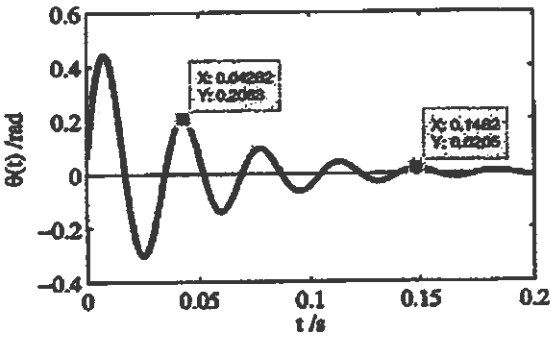
$$\omega=\left(\frac{g\sum_{i=1}^{n}m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i y_i^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Justificar a demonstração.



1) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por duas barras rígidas ligadas em T e por uma massa concentrada m (ponto C). O sistema oscila ($\theta(t)$) em torno do ponto O por acção de um deslocamento $x(t)$ aplicado ao ponto A por um excêntrico. O movimento imposto $x(t)$ transmite-se ao sistema através de uma mola de rigidez k e é controlado por um amortecedor viscoso de constante c (ponto D).

Num ensaio em regime livre, foi registada a resposta $\theta(t)$ representada no gráfico.



Determinar,

a) (10%) a razão de amortecimento ξ;
b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n.

Assumindo a hipótese de pequenas oscilações e considerando desprezável a inércia das barras, estabelecer:

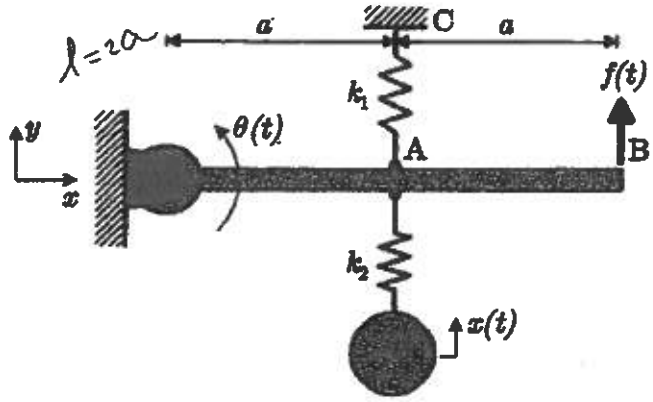
c) (30%) a equação diferencial (linearizada) do movimento.

Para os valores numéricos $a = 0.5$ m e $k = 5 \times 10^4$ N/m, determinar:

d) (10%)a massa concentrada m;

Para um deslocamento harmónico $x(t) = X \sin \omega t$ com $\omega = 360$ rad/s, a amplitude de vibração da massa m é igual a 10 mm.

e) (20%) determinar a amplitude X do deslocamento imposto;
f) (20%) determinar a(s) frequência(s) ω de excitação que assegure(m) uma amplitude $\Theta(\omega)$ inferior a 5°.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por uma barra rígida de massa m_1, de comprimento ℓ, articulada no ponto O, ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de constante de rigidez k_1 e sobre a qual actua uma força $f(t)$ no ponto B. No ponto A está ligada uma mola linear elástica de constante de rigidez k_2 da qual está suspensa uma massa concentrada m_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $x(t)$.

a) (30%) Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para

$$k_1 = 10k \qquad k_2 = 2k \qquad m_1 = 6m \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\,\text{m},$$

b) (15%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.

Para $k = 25600$ N/m e $m = 1$kg,

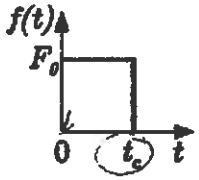
d) (20%) Determinar a amplitude $\Theta(\omega)$ da resposta da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 178$ rad/s. Esboçar graficamente a variação da amplitude $\Theta(\omega)$ em função da frequência de excitação ω, assinalando eventuais pontos notáveis.

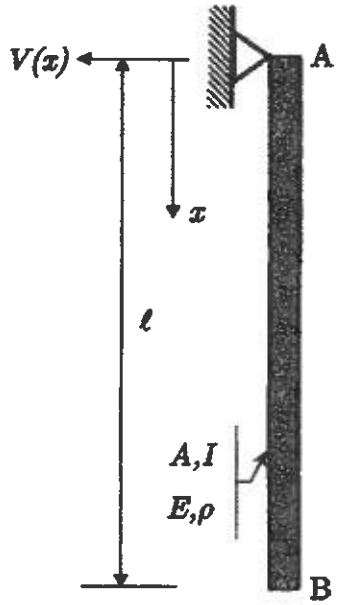
e) (20%) Determinar o valor máximo da resposta $x(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_c = 0.0137$ s. Comentar.

Nota:



$$J_G = \frac{1}{12}m\ell^2$$





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ está apoiada na extremidade $x = 0$ e está livre na extremidade $x = \ell$, conforme se representa na figura.

a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira da viga.

b) (15%) Discutir, justificando, as condições de aplicabilidade da função $V(x) = \alpha x - \delta \sin\frac{\pi}{\ell}x$ como aproximação da forma fundamental de vibração no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função.

c) (30%) Calcular a energia potencial máxima, a energia cinética máxima e o quociente de Rayleigh para determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

d) (30%) Determinar o valor óptimo do parâmetro α e a estimativa óptima da frequência. Justificar o procedimento utilizado. Comparar com a solução exacta. Comentar.

e) (10%) Determinar as coordenadas de eventuais pontos nodais.

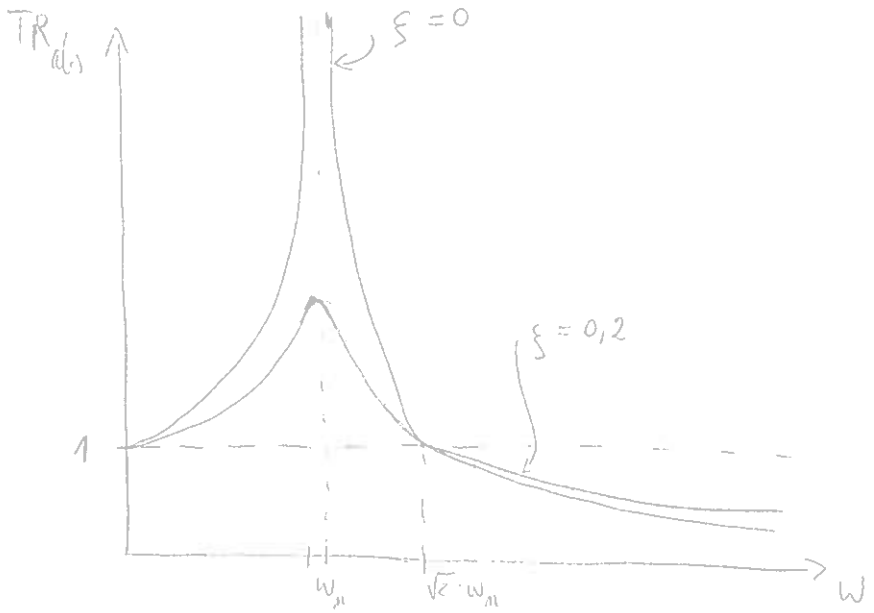
Vibrações e Ruído – Exame 1ª Chamada de 2007-06-20

Parte Teórica

1)

a) Transmissibilidade absoluta, TR_{abs}, representa a transmissão de deslocamento da base para a massa. É o quociente entre a amplitude $X(w)$ do movimento da massa e a amplitude Y do movimento da base:

$$TR_{abs} = \frac{X(w)}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$



$w_r = w_n\sqrt{1-\beta^2}$

Comentários:

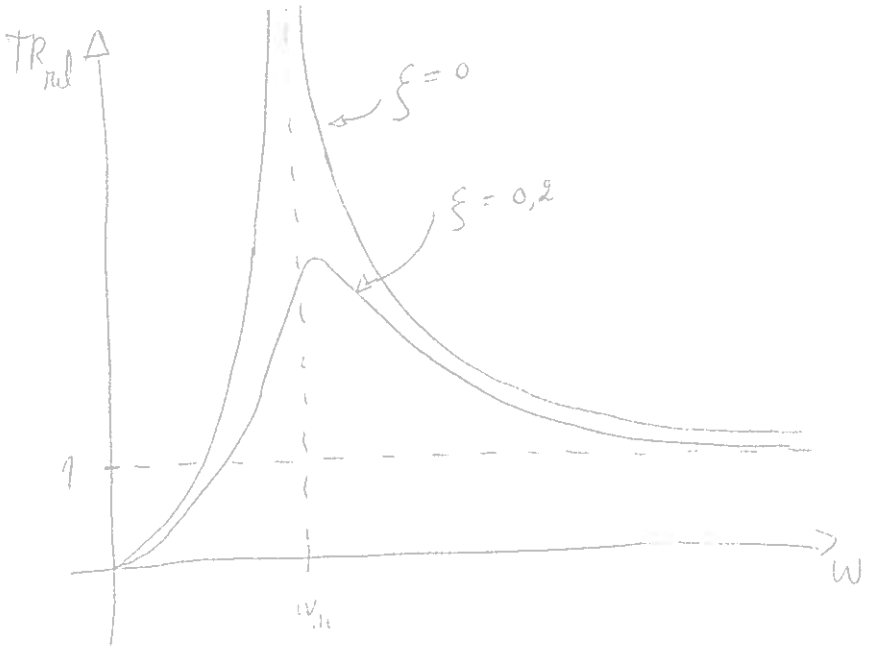
→ Em torno da ressonância a TR é muito sensível ao amortecimento;

→ Para $w = \sqrt{2}\,w_n$ a TR é igual, para qualquer amortecimento, à unidade;

→ Para frequências de excitação superiores a $\sqrt{2}\,w_n$ quanto maior o amortecimento maior a TR; sendo o comportamento contrário para valores de $w < \sqrt{2}\,w_n$

b) A transmissibilidade relativa, TR_{rel}, representa a razão entre a amplitude $Z(\omega)$ do movimento relativo (da massa em relação à base) e a amplitude Y do movimento da base.

$$TR_{rel} = \frac{Z(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



Comentários:

→ Novamente em torno da ressonância há uma grande sensibilidade da TR_{rel} ao amortecimento (diminuindo com o aumento deste);

→ A tendência para infinito da frequência de excitação conduz à tendência para a unidade da TR_{rel} (independentemente do amortecimento); significando que a massa do apoio se mantém praticamente estacionária.

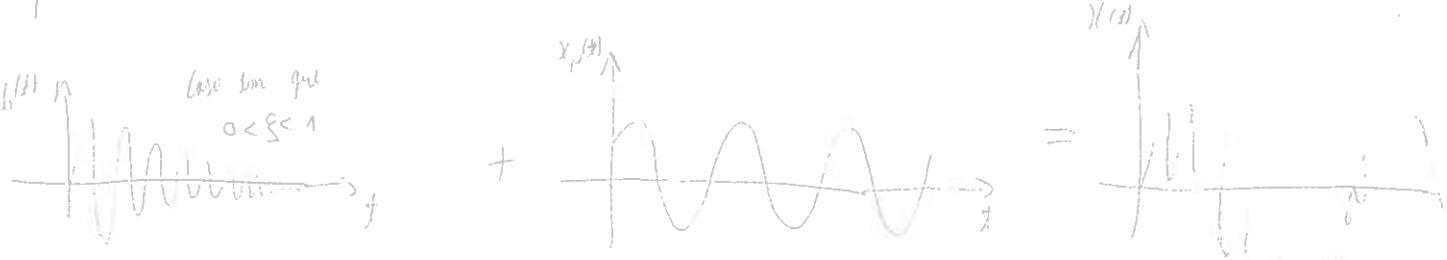
2) a) $$x_p(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \phi)$$

$$X(\omega) = \frac{\frac{F}{K}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad ; \quad \phi = \arctan\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

A resposta transitória é:

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \operatorname{sen}\omega_d t\right)$$

A resposta do sistema a uma solicitação harmónica tem 2 componentes: uma transitória que corresponde à resposta livre ou natural amortecida do sistema e outra estacionária ou permanente que é harmónica de amplitude $X(\omega)$ e desfasamento ϕ em relação à excitação:



b) A resposta do sistema é obtida através da decomposição da solicitação numa série de Fourier, o que dá origem a uma resposta que contém cada resposta a cada termo harmónico da série obtida, ficando portanto uma combinação de harmónicos, cada qual com a frequência $p\omega$ (com p sendo a ordem do harmónico) e com um desfasamento próprio. Esta combinação de respostas individuais só é possível através da aplicação do princípio da sobreposição de efeitos.

Características da resposta estacionária:

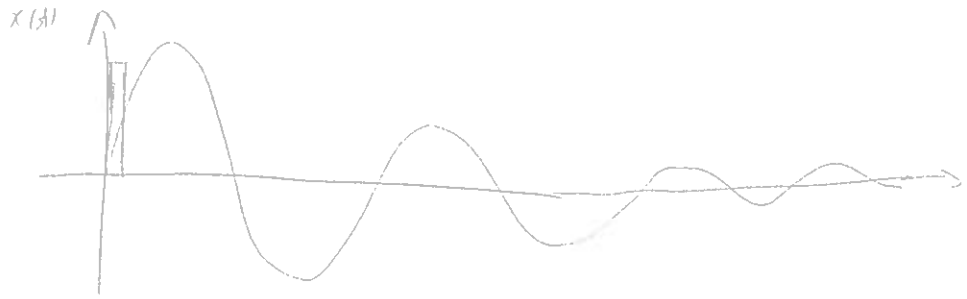
→ É um movimento periódico com o mesmo período da solicitação (regime estacionário periódico)

→ A amplitude $X(\omega)$ e o desfasamento ϕ_p de cada harmónico dependem da ordem p.

NOTA: Cada harmónico ainda tem a si associado uma resposta transitória!

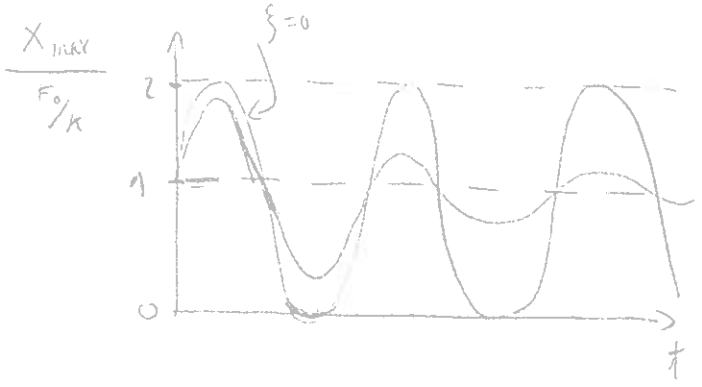
c) A acção do impulso aplicado para $t = \tau$ é equivalente ao efeito de uma velocidade inicial $\dot{x}_0 = \frac{\tilde{F}}{m}$ e um deslocamento inicial nulo. O movimento provocado pela aplicação do impulso é

e de vibração livre ou natural amortecida do sistema para as condições iniciais referidas anteriormente:



d) A resposta a uma solicitação transiente do tipo "degrau" (ou qualquer outro tipo) pode ser obtida por combinação de uma série de forças impulsivas $f(\gamma)$ actuando durante intervalos de tempo $d\gamma$.

Para o caso da resposta à solicitação em "degrau" verifica-se que a resposta é um movimento harmónico à frequência natural amortecida em torno da posição correspondente ao equilíbrio estático $\frac{F_0}{K}$, e que o valor máximo da amplitude pode atingir o dobro do valor de equilíbrio estático $\left(2\,\frac{F_0}{K}\right)$.



3) $$\alpha(j\omega) = \frac{\bar{X}(j\omega)}{F}$$

$$x(t) = \bar{X}(j\omega)\, e^{j\omega t} \rightarrow \dot{x}(t) = j\omega\, \bar{X}(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\, \bar{X}(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

Substituindo na eq. diff. do movimento:

$$\left(-m\omega^2 + j\omega c + K\right)\bar{X}(\omega)\, e^{j\omega t} = F\, e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{X}(\omega) = \frac{F}{(K - m\omega^2) + j\omega c}$$

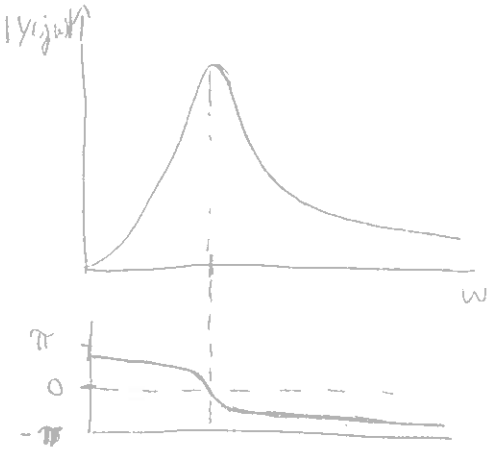
Logo:

$$\alpha(j\omega) = \frac{1}{(K - m\omega^2) + j\omega c} \qquad \text{c.q.d.}$$

A resposta em frequência do tipo receptância é uma forma compacta de obtenção das propriedades intrínsecas do sistema relacionando a excitação (unitária) com a resposta (em deslocamento) estacionária do sistema.

b) $$Y(j\omega) = j\omega\,\alpha(j\omega) = j\omega \frac{1}{(K - m\omega^2) + j\omega c}$$

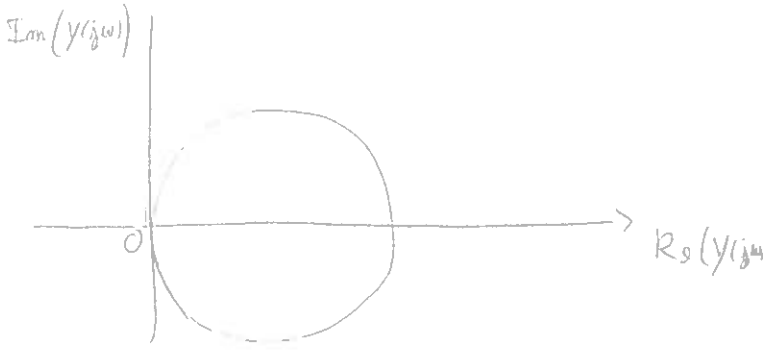
Diagrama de Bode



Máximo para $\omega = \omega_n$

Mudança de fase para $\omega = \omega_n$

Diagrama de Nyquist



Circunferência perfeita

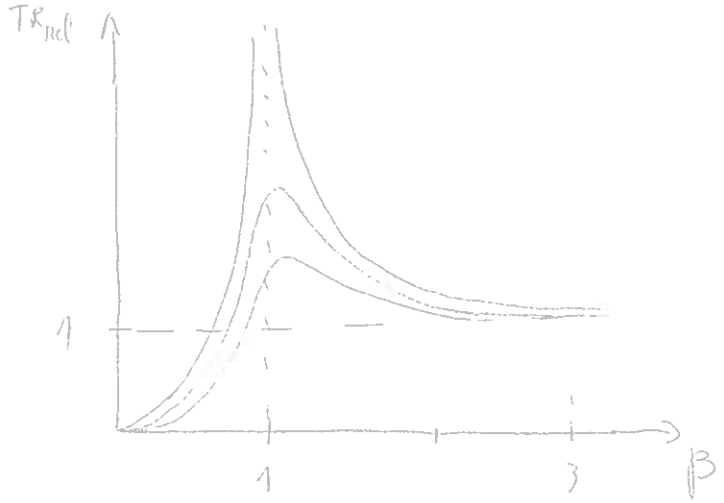
$$\begin{cases} (x_c, y_c) = \left(\frac{1}{2c}, 0\right) \\ n = \frac{1}{2c} \end{cases}$$

4) a), b) Transdutores de deslocamento:

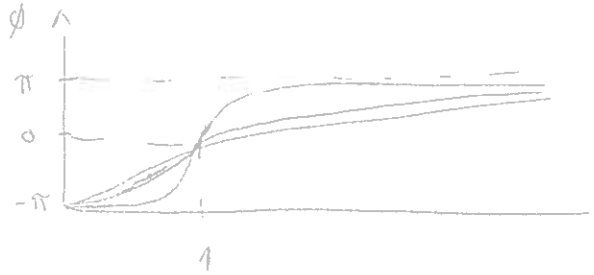
A gama de frequência em que funcionam é $\beta > 3 \Rightarrow w > 3w_n$.

Do forma a poder medir frequências de excitação baixas têm de ter uma frequência natural muito baixa, o que implica grandes massas sísmicas e baixa rigidez.

$$TR = \frac{Z(w)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



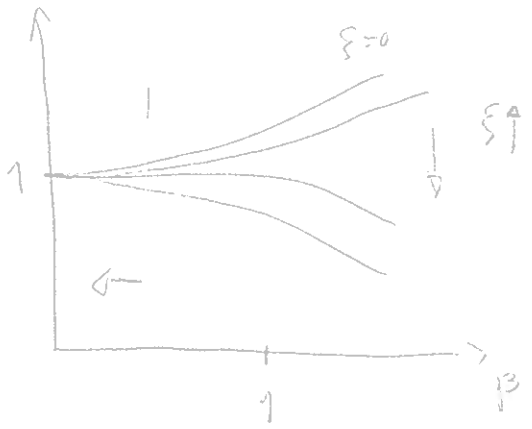
O defasamento tende para π, pelo que a sua resposta está em oposição de fase (no caso de vários harmónicos)



Transdutores de aceleração

$$TR = \frac{-w^2 Z(w)}{Y} = \frac{-w^2\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = -\frac{1}{w_n^2}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Se representarmos o gráfico do termo $\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$



Portanto verifica-se que os acelerómetros funcionam para β pequenos, havendo a necessidade de aumentar a frequência natural do acelerómetro o que conduz a uma pequena massa sísmica e uma grande rigidez, repercutindo-se em atravancamentos pequenos.

O desfasamento, para β baixos e $\xi \approx 0{,}7$, é praticamente linear variando de 0 (para $\beta=0$) a $\frac{\pi}{2}$ (para $\beta=1$), como se vê no gráfico de ϕ.

5) Não sai

6) Não sai

Parte Prática

1) a) $T_d = \frac{2\pi}{w_d}$

Pelo gráfico: $T_d = \frac{0,1482 - 0,04262}{3} \cong 0,035119(3)$ $\wedge$

$w_d = \frac{2\pi}{w_d} \cong 178,5334 \ rad/s \rightarrow w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}}$

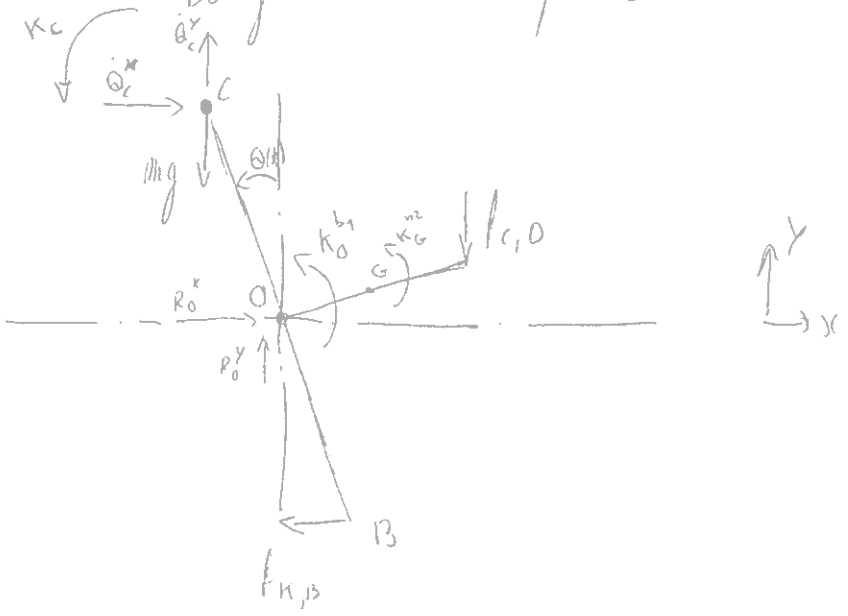
$\ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2 = t_1 + NT)} = \xi w_n T \cdot N \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln \frac{0,2063}{0,0205} = \xi \cdot \left(\frac{178,5334}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot 0,035119(3) \times 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \xi \cong 0,1216$

b) $w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 179,8678 \ rad/s \cong 179,87 \ rad/s$

c) Diagrama de Corpo Livre:



Barras:

$$\vec{H}_O^{b_1} = \cancel{[I]}^{\,=0} \times \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{K}_O^{b_1} = \vec{0}$$

$$\vec{H}_G^{b_2} = \cancel{[I]}^{\,=0} \times \vec{\omega} \quad ; \quad \vec{Q}^{b_2} = \cancel{m}^{\,=0} \times \vec{OG} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{K}_G^{b_2} = \vec{0}$$

Massa:

$$\vec{H}_C^{m} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{I_{zz}}^{\,=0} \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cancel{I_{zz}}^{\,=0}\,\dot{\theta} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{Q}^{m} = m \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} -a \sin\tilde{\theta}^{\theta} \\ a \cos\tilde{\theta}^{1} \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} -a\, m\, \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{Q}^{m} = \begin{vmatrix} -a\, m\, \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_O^{m} = \cancel{\vec{H}_G}^{\,=0} + \vec{OG} \times \vec{Q}^{m} \approx \begin{vmatrix} -a\,\theta \\ a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a\, m\, \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 m\, \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma \vec{K}_O = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 m\, \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Força da mola:

$$\theta_0 = 0^\circ \Rightarrow f_{K,B} = 0 \Rightarrow \theta_{mola} = 0 \text{ rad}$$

$$\left| f_{K,B}^{K} \right| = K\left[\left(a \sin\tilde{\theta}^{\theta} - x(t) \right) - \cancel{\theta_{mola}}^{\,=0} \right] = K\left(a\,\theta(t) - x(t) \right)$$

Força amort.:

$$|\vec{F}_{c,D}| = C\left[\frac{d}{d\theta}\left(3a \underset{\approx}{\sin}\theta\right)\right] = 3aC\dot{\theta}$$

Eq. diferencial de movimento:

$$\Sigma M_0 = \Sigma K_0 \Rightarrow a \underset{\approx}{\sin}\theta \cdot (mg) - a \underset{\approx}{\cos}\theta \cdot \left(K(a\theta - x(t))\right) -$$

$$- 3a \underset{\approx}{\cos}\theta \cdot (3aC\dot{\theta}) = a^2 m \ddot{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(a^2 m\right)\ddot{\theta}(t) + \left(9a^2 C\right)\dot{\theta}(t) + \left(a^2 K - a\,m\,g\right)\theta(t) = (aK)\,x(t)}$$

d) $\omega_n = \sqrt{\frac{K_q}{m_q}} \Leftrightarrow 179{,}87 = \sqrt{\frac{0{,}5^2 \times 5\times10^4 - 0{,}5\ m \cdot 9{,}81}{0{,}5^2 \times m}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m \cong 1{,}5445\ kg$

e) Considerando apenas a resposta estacionária:

$$\theta(t) = \Theta(\omega)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

Pois $x(t) = X\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Theta(\omega) = \frac{\frac{aK\cdot X}{a^2K - amg}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \qquad (1)$$

É-nos dada a amplitude de vibração:

$a \underbrace{\sin\theta}_{\approx \theta,\ \text{para } \theta \leq 0{,}5} = 0{,}010 \Rightarrow \theta(w) \approx 0{,}02 \text{ rad}$

Como: $\beta = \frac{w}{w_n} = \frac{360}{179{,}87} \approx 2{,}0015$

$m \approx 1{,}5445 \text{ Kg}$

$K = 5 \times 10^4 \text{ N/m}$

$\xi \cong 0{,}1216$

Substituindo em (1):

$X \approx 0{,}03043 \text{ m} \cong \boxed{30{,}4 \text{ mm}}$

f) $\theta(w)_{max} = 5^\circ \cong 0{,}08727 \text{ rad}$

$$0{,}08727 = \frac{\frac{0{,}5 \times 5 \times 10^4 \times 0{,}03043}{0{,}5^2 \times 5 \times 10^4 - 0{,}5 \times 1{,}5445}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (\xi = 0{,}1216) \Leftrightarrow \beta_1 \cong 0{,}5618 \ \vee \ \beta_2 \cong 1{,}2748$$

Logo: $\boxed{w_1 = \beta_1 \cdot w_n \cong 101{,}05 \text{ rad/s} \ \vee \ w_2 \cong 229{,}30 \text{ rad/s}}$

2) Não sai

3) Não sai

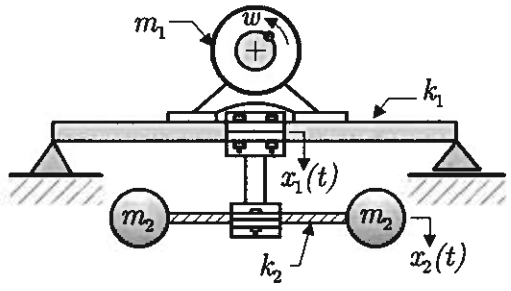


1)(2val) Para um sistema ligeiramente amortecido, caracterizar a resposta nas seguintes situações:

a) perturbação inicial de deslocamento;
b) solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ para $\omega \ll \omega_n$ e para $\omega \gg \omega_n$.
c) Definir factor de amplificação dinâmica e comentar a seguinte afirmação: " A amplitude de resposta em regime harmónico é controlada nas baixas frequências pela rigidez, nas frequências médias pelo amortecimento e nas altas frequências pela massa." Se achar conveniente, juntar um esboço gráfico.

2)(2val) A análise do comportamento dinâmico de um sistema discreto pode assentar no modelo espacial do sistema.

a) Indicar a(s) principal(s) vantagem(s) da utilização das equações de Lagrange no estabelecimento do modelo espacial. Como é considerado, normalmente, o mecanismo de amortecimento de tipo viscoso nas equações de Lagrange?
b) Indicar que tipo de acoplamento pode apresentar o modelo espacial e qual a sua origem;
c) Escrever, em notação matricial, as expressões da energia cinética e da energia potencial elástica. Caracterizar, justificando, estas duas formas energéticas.



3)(1 val) A figura representa um sistema vibratório ao qual foi acoplado um absorsor de vibrações sintonizado para a frequência de excitação.

a) Representar graficamente a amplitude de resposta do sistema principal antes e após a montagem do absorsor, indicando claramente eventuais pontos notáveis e a posição de funcionamento;
b) Referir as implicações da razão de massas no funcionamento do sistema e/ou na eficiência da solução.

4)(1 val) O isolamento de vibrações consiste em reduzir a grandeza de forças transmitidas por equipamentos para as suas fundações ou em reduzir o movimento de apoios móveis para os equipamentos.

a) Definir transmissibilidade em ambos os casos;
b) Discutir a eficiência do isolamento em termos da massa do equipamento e da rigidez da suspensão;
c) Justificar a razão pela qual, em geral, não se considera o amortecimento no dimensionamento de uma suspensão elástica;
d) Para uma excitação multi frequência, indicar, justificando, qual a frequência a considerar no dimensionamento da suspensão elástica.

5)(2 val) A resposta forçada de uma viga em flexão pode exprimir-se em termos do deslocamento lateral e/ou dos esforços internos e pode ser determinada por sobreposição modal truncada dos modos naturais de vibração.

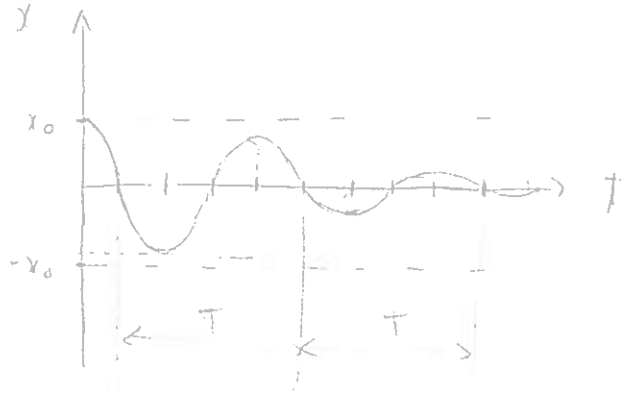
a) Estabelecer uma comparação entre a equação característica (cujas soluções são as frequências e as formas naturais de vibração) de um sistema discreto e de um sistema contínuo;
b) Escrever as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das formas naturais de vibração de uma viga em flexão;
c) Discutir a selecção e a dimensão da base modal seleccionada para determinação da resposta forçada.
d) Designando as 4 primeiras frequências naturais de uma viga simplesmente apoiada por ω_1, ω_2, ω_3 e ω_4, representar graficamente a função de resposta em frequência de tipo receptância $\alpha_{\ell/2,\ell/3}(\omega)$ na banda de frequências $\left[0;\ 1.5\omega_4\right]$ indicando claramente a posição de cada uma das frequências naturais.

Exame de Recurso de 2007-07-12

Parte Teórica

1) Admite-se que se entende por sistema ligeiramente amortecido um sistema em que: $0 < \xi < 1$

a) Após a perturbação inicial de deslocamento a resposta do sistema vai ser uma resposta livre ou natural amortecida, sendo caracterizada por um harmónico (em decaimento) à frequência natural amortecida $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, com $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$.



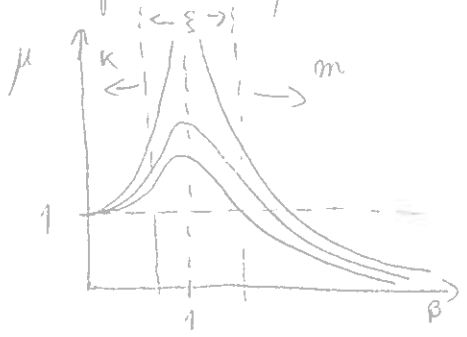
b) Para $\omega \ll \omega_n \Rightarrow \beta \to 0$; $\omega \gg \omega_n \Rightarrow \beta \to \infty$

$$x(t) = \frac{\frac{F}{K}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad ; \quad \phi = \arctan \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

caracterizando apenas a resposta estacionária, é um movimento harmónico com frequência igual à frequência de excitação e com um desfasamento ϕ em relação à solicitação. Para $\omega \ll \omega_n$, $\beta \to 0$, pelo que a amplitude tenderá para $\frac{F}{K}$ (valor do deslocamento estático). Para $\omega \gg \omega_n$, $\beta \to \infty$, pelo que a amplitude tende para zero. Como se mostrará em c), para $\omega \ll \omega_n$ a resposta é "controlada" pela rigidez e para $\omega \gg \omega_n$ a resposta é controlada pela massa.

c) O factor de amplificação dinâmica é um factor adimensional que multiplicado pelo deslocamento estático, $\frac{F}{K}$, nos dá o valor da amplitude da resposta. Define-se por:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



Comentário à afirmação:

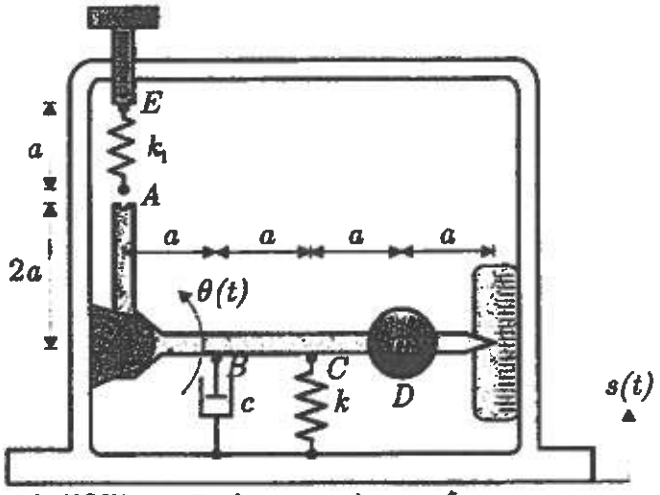
A resposta estacionária define-se: $y(t) = \frac{F}{K}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\right) = \mu$

Como podemos ver:

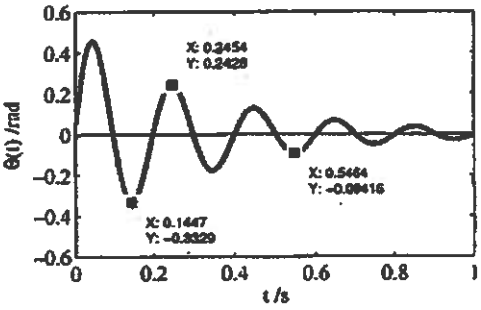
- Para baixas frequências ($\beta \to 0$) $\mu \to 1$ pelo que $y(t) = \frac{F}{K}$, provando-se a dependência da rigidez
- Para médias frequências ($\beta \to 1$ ou $w \to w_n$) $\mu = \frac{1}{2\xi}$ mostrando-se a grande influência do amortecimento (principalmente para baixos valores de ξ)
- Para altas frequências ($\beta \to \infty$) $\mu \to 0$ e w torna-se muito importante face a w_n pelo que o termo $\frac{F}{K}$ que também pode ser expresso por $\frac{F}{w_n^2 \cdot m}$ faz notar que a massa passa a ser a propriedade preponderante.

2) ; 3) ; 4) e 5) não saem.

1) (4 val.) A figura representa um transdutor de vibrações constituído por uma barra rígida em forma de L, articulada no ponto O, com uma massa concentrada $m = 1$ kg no ponto D, ligada a um amortecedor de constante c ponto B e a uma mola linear elástica de constante k no ponto C. No ponto A pode ser ligada uma mola linear elástica de constante k_1 e comprimento livre a, sendo o seu comprimento efectivo ajustável através de um parafuso.



Antes de utilização, o mecanismo do transdutor foi sujeito a um teste em regime livre, tendo sido registada a resposta $\theta(t)$ representada no gráfico. Determinar,



a) (10%) a razão de amortecimento ξ;

b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n.

Considerando a mola AE livre (não actuante), assumindo a hipótese de pequenas oscilações e considerando desprezável a inércia da barra, estabelecer:

c) (25%) a equação diferencial (linearizada) do movimento.

d) (10%)Determinar a constante de amortecimento c e a constante de rigidez k;

Para ensaiar o transdutor, aplicou-se um deslocamento harmónico $s(t) = S \sin \omega t$ com uma amplitude $S = 5$ mm e uma frequência $\omega = 3$Hz.

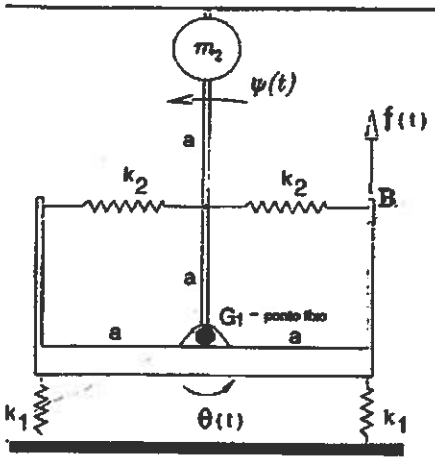
e) (15%) determinar a amplitude S_l lida na régua do transdutor e o respectivo erro ε.

Para corrigir o valor lido, ajustou-se o parafuso da mola AE de modo a comprimir a mola para dois terços do seu comprimento livre (elongação $\delta = \frac{1}{3}a$).

f) (10%)Reescrever a equação diferencial do movimento;

Para uma rigidez $k_1 = 4k$,

g) (10%)Calcular a nova frequência natural e o novo valor lido na régua.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por:

- Corpo 1 - uma estrutura rígida, de massa m_1 e momento de inércia J_{G_1}, ligada ao exterior no ponto G_1 por uma articulação e por duas molas lineares elásticas de igual rigidez k_1. Sobre esta estrutura actua uma força $f(t)$ no ponto B.
- Corpo 2 - uma massa m_2, suportada por uma barra rígida de massa e inércia não considerável, ligada ao exterior pela articulação anterior e ligada ao corpo 1 por duas molas lineares de igual rigidez k_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $\psi(t)$.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Considerando os dados abaixo indicados, determinar:

$$k_1 = 5k \qquad k_2 = 2k \qquad J_{G_1} = 8ma^2 \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\text{m}$$

b) (15%) as frequências e formas naturais de vibração do sistema. Esboçar e comentar as formas naturais de vibração;

c) (15%) as equações do movimento do sistema na base modal;

Tomando para valores de k e m os abaixo indicados, determinar:

$$k = 20000 \text{ N/m} \qquad m = 0.5 \text{ kg}$$

d)(10%) o valor máximo da resposta $\theta(t)$ quando $f(t) = F\,\delta(t)$ (solicitação impulso de valor F aplicada no instante inicial).

e)(10%) a amplitude $\Psi(\omega)$ da resposta $\psi(t)$ da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 25\,\text{rad/s}$.

f)(20%) Tendo em conta a solicitação da alínea anterior, alterar a distância entre a massa concentrada m_2 e o ponto G_1 de forma a que a amplitude $\Psi(\omega)$ da sua resposta seja reduzida de 5%.

3) (4 val.) Na figura representa-se um modelo simplificado das asas e da fuselagem de uma aeronave. As asas são modelizadas por duas vigas de comprimento ℓ ligadas rigidamente entre si por uma massa concentrada m que representa a fuselagem. As vigas têm uma secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. O modelo considerado está livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação) com energia elástica nula e frequência também nula.

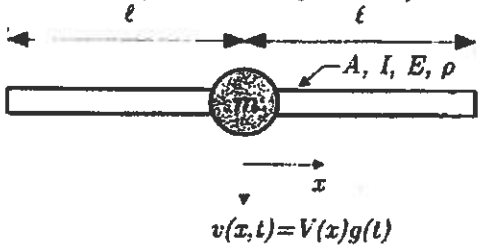
a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (15%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{\ell^2}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\epsilon = \frac{m}{2\rho A\ell}$.

d) (20%) Indicar os valores exactos da frequência natural para os casos limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$.

e) (20%) Discutir a validade da solução fornecida pelo quociente de Rayleigh para os valores limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$. Se necessário, propor uma solução alternativa para a função de aproximação $V(x)$.



$v(x,t) = V(x)g(t)$

Parte Prática

1)

a)

$$T = \frac{0,5464 - 0,1447}{2} = 0,20085 \text{ s} \Rightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{T} \cong 31,2830 \text{ rad/s}$$

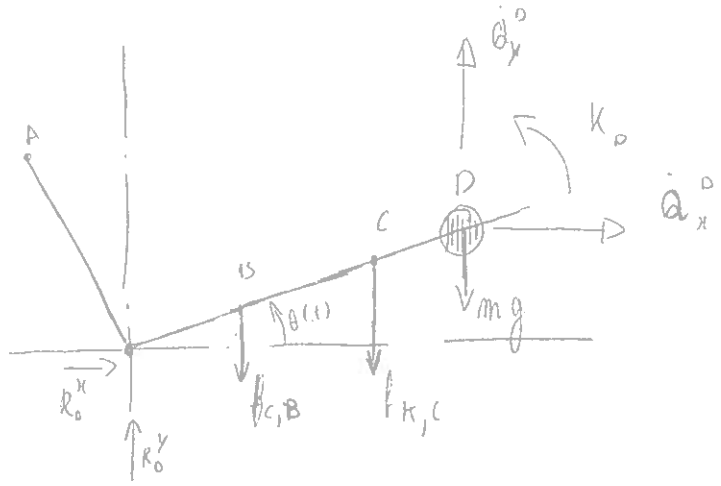
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2 = t_1 + NT)} = \xi \omega_n T N \Leftrightarrow \ln \frac{-0,3329}{-0,09416} = \xi \left(\frac{31,2830}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \times$$

$$\times 0,20085 \times 2 \Leftrightarrow \xi \cong 0,09999 \simeq 0,1000$$

b) $$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 31,4405 \text{ rad/s}$$

c) Diagrama de Corpo Livre:



$$\Sigma M_0 = \Sigma K_0$$

Barra em L, sem inércia desprezável logo:

$$\vec{Q}^L = \vec{0} \; ; \; \vec{K}_G^L = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_0^L = \vec{0}$$

Massa Concentrada:

$$\vec{OD} = \begin{vmatrix} 3a\cos\theta \\ 3a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 3a \\ 3a\,\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{Q}^{D} = m \begin{vmatrix} 0 \\ 3a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{H}_D = \cancel{[I]} \times \vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_D = \vec{0}$$

$$\vec{K}_O^{m} = \cancel{\vec{K}_D^{m}} + \vec{OD} \times \vec{Q}^{m} = \begin{vmatrix} 3a\,\theta \\ 3a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 3a\,m\,\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +9a^2 m\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

— // —

Força da mola C:

Sist. Estático: $\theta(t) = 0 \Rightarrow -2a\cos\theta \cdot \left[-K\left(2a\,\mathrm{sen}\,\theta - \theta_{md}\right)\right] - 3a\cos\theta\,(mg) \Rightarrow \theta_{md} = \frac{3mg}{2K}$

Logo:

$$|f_{K,C}| = K\left[\left(2a\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{3mg}{2K}\right)\right] = K\left(2a\,\theta - \frac{mg}{K}\right)$$

Força do amort.:

$$|f_{C,B}| = C\left[\frac{d}{d\theta}\left(a\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right] \approx Ca\,\dot{\theta}$$

Então, a eq. dif. de movimento fica:

$$\Sigma M_0 = \Sigma k_0 \Rightarrow \quad -a\cos\theta \cdot (ca\dot{\theta}) - 2a\cos\theta \cdot \left[k\left(2a\theta - \frac{3mg}{2k}\right)\right] -$$

$$-3a\cos\theta\,(mg) = +9a^2 m\ddot{\theta} \iff$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(9a^2 m)\ddot{\theta}(t) + (a^2 c)\dot{\theta}(t) + (4a^2 k)\theta(t) = 0}$$

Com $m = 1\,kg$

d) $$\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{a^2 c}{2 m_{eq} \cdot w_n} \Rightarrow 0{,}1000 = \frac{a^2 c}{2 \times 9 \times 1 \times 31{,}4405} \iff$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c \cong 56{,}5929 \ \ N\,s/m^2}$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \iff 31{,}4405 = \sqrt{\frac{4a^2 k}{9a^2 \times 1}} \iff \boxed{k \cong 2224{,}11\ N/m}$$

e) $$S(t) = \overset{=0{,}005}{S} \cdot \cos\left(\overset{(6\pi)}{w_n} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Então:

$$(9a^2 m)\ddot{\theta}(t) + (a^2 c)\dot{\theta}(t) + (4a^2 k)\theta(t) = 2a\,k\,S\cos\left(wt - \frac{\pi}{2}\right) - acwS\sin\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \underbrace{S\sqrt{(2ak)^2 + (acw)^2}}_{\Theta(w)} \cos\left(wt - \frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

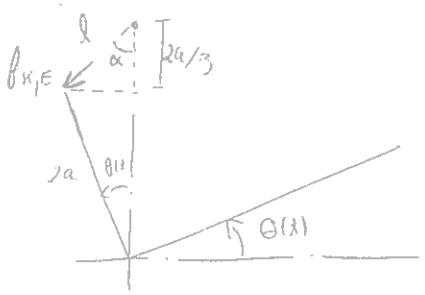
Com $\gamma = \arctan\frac{acw}{2ak}$

Amplitude da Resposta:

$$\Theta(w) = \frac{\dfrac{S\sqrt{(2ak)^2 + (acw)^2}}{k_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \xrightarrow{\text{Substituindo valores}} \Theta(w) \cong \frac{0{,}003945}{|a|}$$

$$S_f = 4a \cdot \underbrace{\sin[\theta(w)]}_{\approx \theta(w)} \cong 4a \cdot \theta(w) = 4q \cdot \frac{0{,}003945}{\text{rad}} = 0{,}01578 \ m \approx \boxed{15{,}8 \ mm}$$

f)



Da cinemática sabemos que:

$$\begin{cases} l \sin\alpha = 2a \sin\theta \\ l\cos\alpha + 2a\cos\theta = 2a + \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2a}{l}\sin\theta \\ \tan\alpha = \frac{2a\cdot\sin\theta}{2a + \frac{2a}{3} - 2a\cos\theta} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{2a\sin\theta}{\sin\alpha} \\ \alpha = \arctan\left[\frac{2a\sin\theta}{2a + \frac{2a}{3} - 2a\cos\theta}\right] \end{cases}$$

Se linearizarmos:

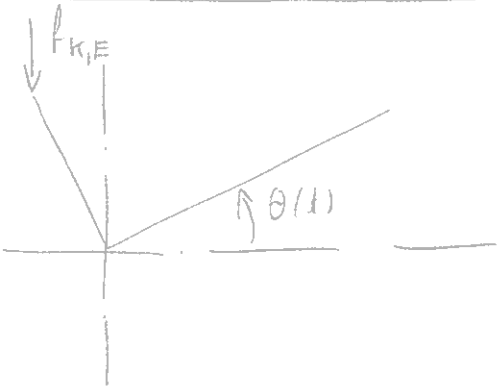
$$\alpha = \arctan\left[\frac{2a\,\theta}{\frac{2a}{3}}\right] = \arctan(3\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$l \cong \frac{2a\sin\theta}{\sin(\arctan 3\theta)} \approx \frac{2a\,\theta}{\sin(\arctan 3\theta)}$$

Logo: $|f_{K,E}| = K_1 \cdot (a - l) = K_1 \cdot \left(a - \frac{2a\,\theta}{\sin(\arctan 3\theta)}\right)$

Para simplificar os cálculos:



$$F_{K,E} = K_1\left[\left(2a - 2a\cos\theta + \frac{a}{3}\right)\right] \approx K_1 \cdot \frac{a}{3}$$

Logo: $$M_o^{K,E} = 2a \operatorname{sen}\theta \cdot \left(K_1 \cdot \frac{a}{3}\right) \approx \frac{2a^2}{3} \cdot K_1 \cdot \theta$$

Portanto, a eq. diferencial de movimento fica:

$$\left(9a^2 m\right)\ddot{\theta}(t) + \left(a^2 c\right)\dot{\theta}(t) + \left(4a^2 K - \frac{2a^2}{3}K_1\right)\theta = S\sqrt{(2aK)^2 + (ac\omega)^2}\cos(\omega t -$$

g) $$\omega_n = \sqrt{\frac{4a^2 K - \frac{2a^2}{3}K_1}{9a^2 m}} \approx \boxed{18,1522 \text{ rad/s}} \quad ; \quad \xi = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \approx 0,1697$$

$$\theta(\omega) = \frac{\frac{S\sqrt{(2aK)^2 + (ac\omega)^2}}{K_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \approx \frac{0,007121}{|a|}$$

$$S_1 = 4a\,\theta(\omega) \approx 0,028484 \text{ m} \approx \boxed{28,5 \text{ mm}}$$

2) ; 3) não pedem!

1) (2 val) A vibração mecânica pode definir-se como um movimento alternado em torno de uma posição de referência.

a) (25%) Indicar quais os elementos constituintes de um sistema vibratório;
b) (25%) Explicar, do ponto de vista energético, o fenómeno da vibração;
c) (25%) Definir frequência natural de vibração;
d) (25%) Definir frequência de ressonância de amplitude.

2) (2 val) O isolamento de vibrações consiste em reduzir a grandeza de forças transmitidas por equipamentos para as suas fundações ou em reduzir o movimento de apoios móveis para os equipamentos.

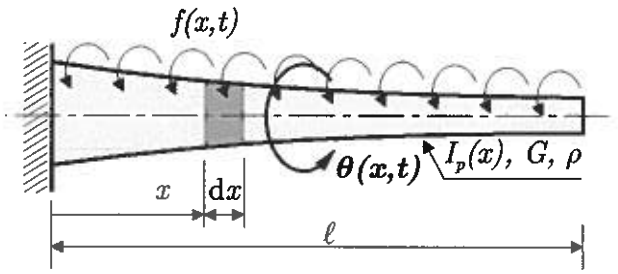
a) (25%) Definir transmissibilidade absoluta e relativa. Representar graficamente e lado a lado a TR_{abs} e a TR_{rel}, indicando eventuais pontos notáveis.
b) (25%) Discutir a eficiência do isolamento em termos da massa do equipamento e da rigidez da suspensão;
c) (25%) Justificar a razão pela qual, em geral, não se considera o amortecimento no dimensionamento de uma suspensão elástica para isolamento de vibrações;
d) (25%) Para uma excitação multi frequência, indicar, justificando, qual a frequência a considerar no dimensionamento da suspensão elástica.

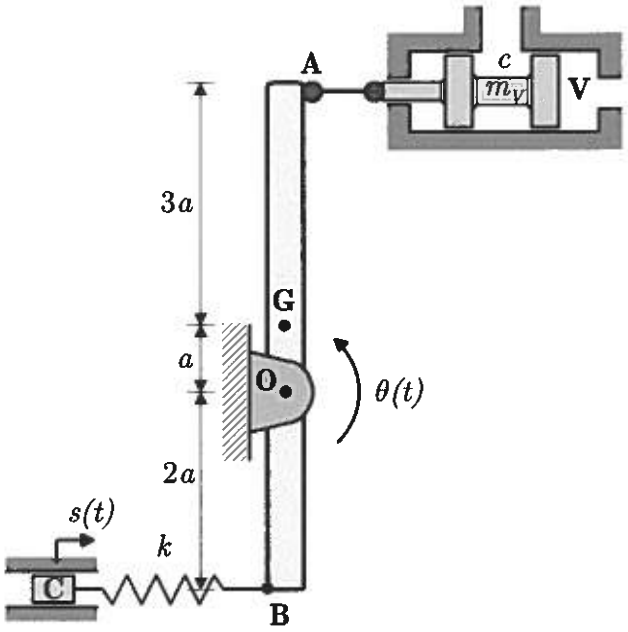
3) (2 val) O comportamento vibratório de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}$ e $\{\dot{x}(t=0)\}$.

a) (25%) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez;
b) (25%) Caracterizar as equações de movimento na base modal ou natural;
c) (25%) Mostrar como a resposta $\{x(t)\}$ do sistema é dada pela combinação linear (sobreposição) dos modos naturais de vibração;
d) (25%) Com base nas frequências naturais ω_1 e ω_2 e nos amortecimentos modais ξ_1 e ξ_2 de um sistema com 2 graus de liberdade, estabelecer duas equações que permitam determinar os parâmetros α e β de uma matriz de amortecimento proporcional, $[c]=\alpha[m]+\beta[k]$. Referir o interesse de uma matriz de amortecimento proporcional.

4) (2 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção descrita pelo campo de deslocamento angular $\theta(x,t)$ que se pode exprimir na forma $\theta(x,t)=\Theta(x)g(t)$.

a) (40%) Considerar um elemento infinitesimal de veio e, por aplicação da 2ª lei de Newton, estabelecer a equação de equilíbrio dinâmico;
b) (30%) Explicar o significado físico da solução $\theta(x,t)$ expressa na forma $\theta(x,t)=\Theta(x)g(t)$;
c) (30%) Escrever as expressões que traduzem as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das funções características $\Theta_r(x)$ $r=1,\ldots,\infty$ representativas das formas naturais de vibração.





1) (4 val.) O mecanismo representado na figura acciona uma válvula V de massa m_V. Admite-se que a viscosidade do fluído hidráulico se traduz num coeficiente de amortecimento c. A barra **AOB** está articulada com a válvula no ponto **A**; o seu momento de inércia relativamente a um eixo que passa pelo centro de gravidade é $I_G = \frac{1}{12} m_b \ell^2$, onde m_b representa a massa e ℓ ($\ell = 6a$) o comprimento da barra. Uma das extremidades de uma mola linear elástica está ligada à barra no ponto **B** e a outra extremidade (ponto **C**) está submetida a um deslocamento $s(t)$ na horizontal. As oscilações angulares da barra são pequenas. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m a mola não está deformada.

a) (30%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Admitindo que a equação de movimento é

$$0.12346\,\ddot{\theta}(t) + 0.144\,\dot{\theta}(t) + 10\,\theta(t) = 125\,s(t),$$

determinar:

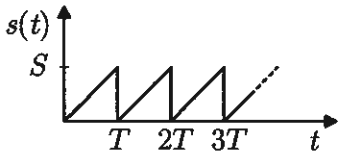
b) (10%) a frequência natural não amortecida ω_n;

c) (10%) a razão de amortecimento ξ;

d) (20%) a amplitude do movimento da válvula, quando $s(t) = 2\times10^{-3}\cos(13.5\ t)$ [m];

e) (15%) a amplitude da força transmitida à válvula, quando $s(t) = 2\times10^{-3}\cos(13.5\ t)$ [m].

f) (15%) Admitindo que o deslocamento $s(t)$ tem a forma representada na figura seguinte, com $T = 2.1244$ s, obter uma estimativa para o deslocamento angular da barra (pretende-se uma expressão em que apenas **um** termo é função do tempo).



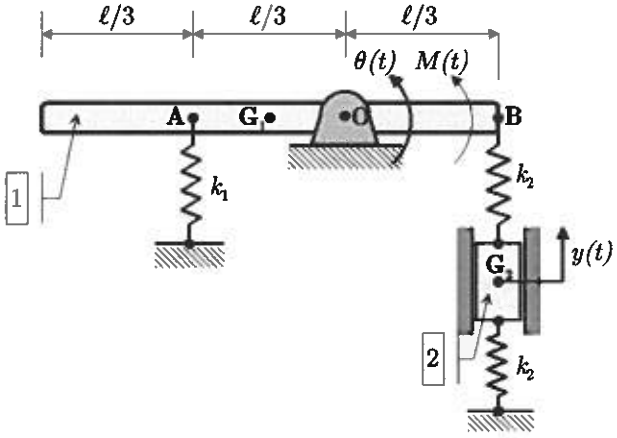
Nota:

$$\int x\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$$

$$\int x\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$$

$$\int x^2\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(-a^2x^2\cos(ax) + 2\cos(ax) + 2ax\sin(ax)\right)$$

$$\int x^2\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(a^2x^2\sin(ax) - 2\sin(ax) + 2ax\cos(ax)\right)$$



2) (4 val.) O mecanismo representa-do na figura é constituído por dois corpos. O corpo 1 é uma barra de comprimento ℓ, que roda em torno do ponto fixo **O**, sob a acção do momento motor $M(t)$; os pontos **A** e **B** da barra estão ligados a molas lineares. O corpo 2 é uma massa que se encontra ligada a uma mola em cada extremidade. Na situação de equilíbrio estático, $\theta = 0$ e $y = 0$. A dissipação de energia no sistema é desprezável.

a) (30%) Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 & -1200 \\ -1200 & 12000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

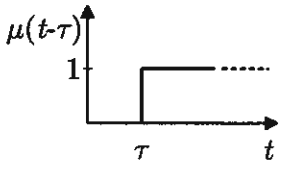
b) (15%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

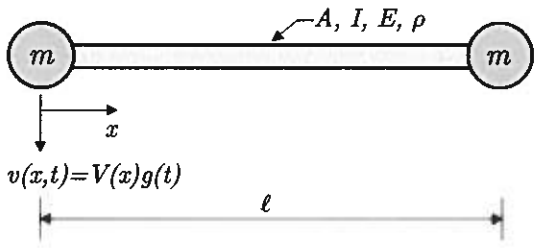
c) (15%) Escrever as equações de movimento na base modal.

d) (20%) Calcular a expressão da amplitude $\Theta(\omega)$ de rotação da barra em função da frequência de excitação, quando $M(t) = M_0 \cos(\omega t)$ e considerando apenas o regime estacionário. Esboçar graficamente a variação da amplitude de $y(t)$ em função da frequência, assinalando eventuais pontos notáveis.

e) (20%) Determinar o limite superior da resposta $\theta(t)$ à solicitação do tipo,

$$\begin{cases} M(t) = M_0 \cos(\omega t), & t \le \tau \\ M(t) = M_0 \cos(\omega t) + \mu(t-\tau) M_1, & t > \tau \end{cases}$$, onde M_0 e M_1 são constantes e $\mu(t-\tau)$ é a função degrau unitário aplicado no instante $t = \tau$.





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I possui em cada uma das suas extremidades uma massa concentrada m. O material da viga apresenta módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. A viga encontra-se livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação e/ou rotação) com energia elástica nula e frequência nula.

a) (20%) Escrever e classificar as condições de fronteira da viga.

b) (20%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \frac{2}{\pi} - \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\varepsilon = \frac{m}{\rho A \ell}$. Esboçar graficamente a variação da frequência em função de ε.

d) (30%) Indicar o valor exacto da frequência natural quando $m \to 0$. Comparar com o resultado aproximado obtido na alínea anterior e comentar.

Parte Teórica – Exame 1ª Chamada de 2008-06-11

1) a) Um sistema vibratório é constituído, em geral, por um elemento capaz de armazenar energia cinética (massa ou inércia), um elemento capaz de armazenar energia potencial (elemento elástico) e um elemento dissipador de energia (amortecedor)

b) O fenómeno da vibração do ponto de vista energético não é mais que a interconversão de energia cinética em energia potencial com a consequente dissipação de energia. Do referia que o sistema tem de estar a descrever um movimento oscilatório.

c) A frequência natural de vibração é a frequência própria de um sistema (não amortecido) quando este se encontra a vibrar sem a acção de forças exteriores (a perturbação inicial da resposta livre ou natural é um deslocamento ou uma velocidade). Define-se como sendo: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

É uma propriedade intrínseca do sistema.

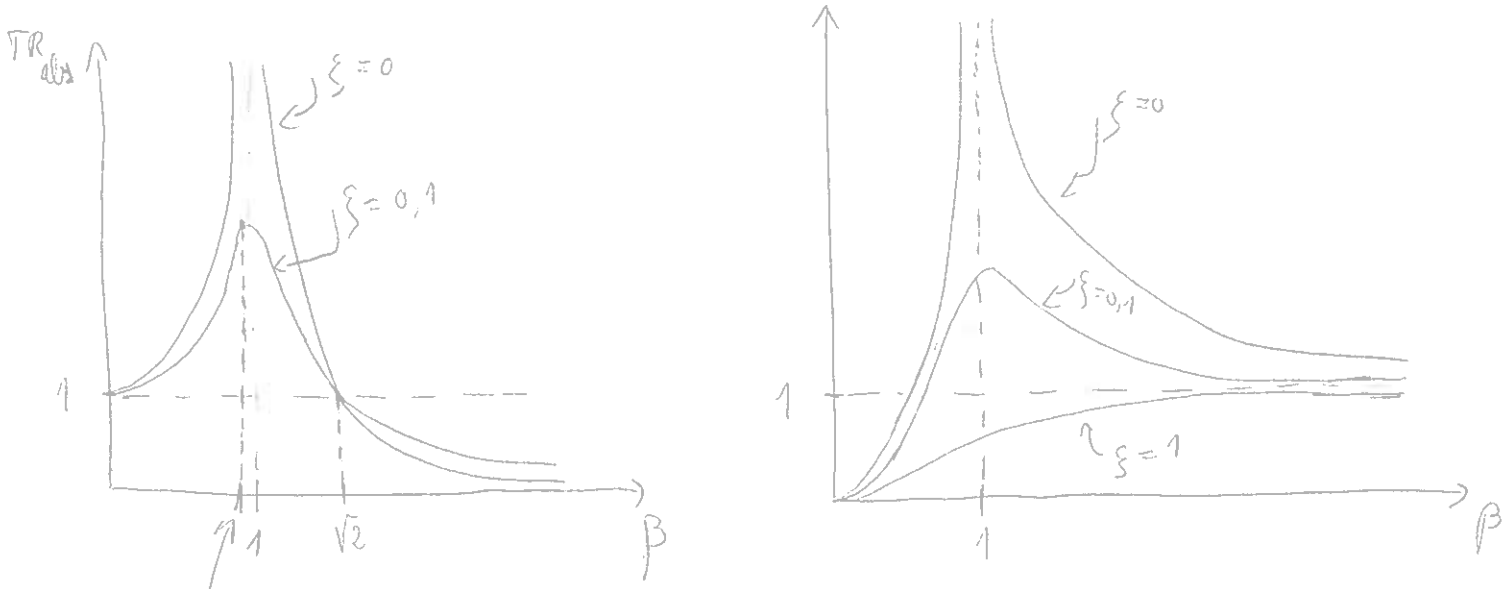
d) A frequência de ressonância de amplitude é a frequência de excitação que provoca a máxima amplitude (de deslocamento, por omissão) do sistema. Define-se para um regime harmónico como sendo: $\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$

2) Transmissibilidade absoluta é definido como sendo a razão entre a amplitude do deslocamento transmitido à massa (ou inércia) pelo movimento oscilatório da base e a amplitude deste último deslocamento: $TR_{abs} = \frac{X(\omega)}{Y} =$

$$= \frac{\frac{1}{k}\sqrt{k^2 + (\omega c)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

A Transmissibilidade relativa define-se como sendo a razão entre a amplitude do deslocamento relativo da massa (ou inércia) em relação à base e a amplitude do deslocamento da base:

$$TR_{rel} = \frac{Z(w)}{Y} = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



$$\frac{\partial (TR(\beta;\xi))}{\partial \beta} = 0 \rightarrow \beta_{max} = \dots$$

b) Como vemos através do gráfico TR_{abs}, para $\beta > \sqrt{2}$ há isolamento da vibração sendo este tanto melhor quanto maiores os β. $\frac{w}{w_n} > \sqrt{2} \Rightarrow w_n < \frac{w}{\sqrt{2}}$. Como $w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ e como normalmente a massa dos apoios é menor que a do sistema, temos de olhar apoios isoladores com uma rigidez muito baixa. Idealmente, quanto maior a massa da suspensão e menor a sua rigidez mais isolante é a mesma.

c) Em geral não se discute o amortecimento porque, como vemos no gráfico, a partir de $\beta = \sqrt{2}$ (e principalmente para $\beta > 3$) a sua influência é pequena na amplitude do deslocamento da massa em relação à base. De referir no

entanto que o aumento do amortecimento conduz a um pior isolamento ($\beta > \sqrt{2}$) mas é sempre necessário que ele exista devido às fases de arranque e de paragem.

d) Para uma solicitação multi frequência tem de se considerar a frequência de excitação mais baixa uma vez que é para esta que a transmissibilidade é maior (considerando que β é sempre superior a $\sqrt{2}$), como podemos ver no gráfico de TR_{abs}. Para frequências muito baixas a rigidez teria de ser demasiado baixa provocando deflexões estáticas muito grandes. Nestes casos usam-se amortecedores de grande massa.

3) Não Sei

4) Não sei

Parte Prática

1) Feito anteriormente //

2); 3); Não sabem



1) (2 val) Um sistema vibratório com um grau de liberdade e amortecido é sujeito a diferentes solicitações.
Caracterizar sucintamente e esboçar graficamente (indicando eventuais pontos notáveis) a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

a) (30%) solicitação impulsiva aplicada no instante $t = \tau$, $f(t) = F^{*}\delta(t-\tau)$;

b) (30%) solicitação em "degrau" aplicada no instante $t = \tau$, $f(t) = F_0\mu(t-\tau)$.

O sistema é sujeito a uma solicitação periódica $f(t) = f(t+T)$ cuja frequência fundamental $\omega = 2\pi / T$ é menor do que a frequência de ressonância do sistema. No entanto, o sistema responde com um nível de vibração elevado.

c) (40%) Diagnosticar a causa de tal comportamento.

2) (2 val) Considerar um sistema vibratório com um grau de liberdade em regime forçado.

a) (25%) Definir factor de amplificação dinâmica. Representar graficamente o factor de amplificação dinâmica em função da frequência, indicando claramente eventuais pontos notáveis.

b) (25%) Designando a resposta a um impulso unitário $\delta(t)$ por $h(t)$, estabelecer, justificando, uma expressão genérica para a determinação da resposta a uma excitação arbitrária;

c) (25%) Definir espectro de resposta transiente e indicar a sua principal utilidade.

d) (25%) Um sistema não amortecido em regime forçado harmónico, quando excitado a uma frequência idêntica à sua frequência natural, responde com uma amplitude que aumenta indefinidamente (sem limite). Com base na análise de forças actuantes sobre o sistema, explicar este comportamento.

3) (2 val) O comportamento vibratório de um sistema com n graus de liberdade pode ser descrito pelo modelo espacial $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$.

a) (25%) Definir modos naturais de vibração;

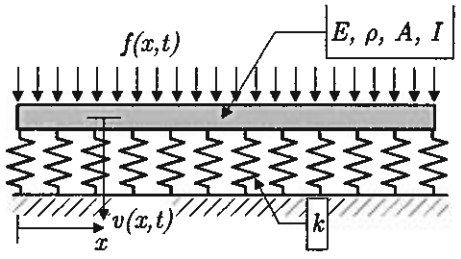
b) (25%) Indicar e escrever uma propriedade relevante dos vectores modais representativos das formas naturais de vibração.

c) (25%) Referir qual o interesse da representação do sistema de equações de movimento na base modal.

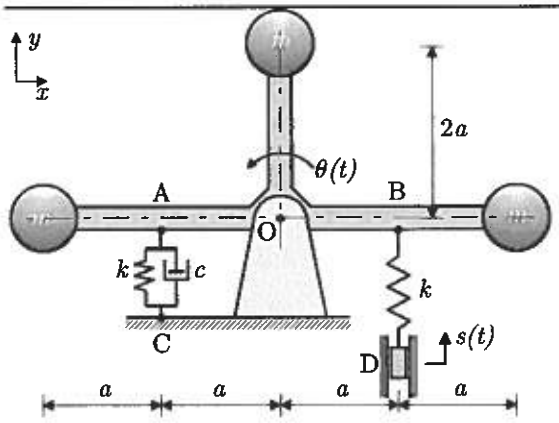
d) (25%) Porque é que a matriz de massa é sempre definida positiva? A matriz de rigidez é sempre definida positiva? Justificar.

4) (2 val) O comportamento vibratório em regime livre ou natural de um sistema contínuo é governado por uma equação diferencial de derivadas parciais cuja solução pode ser determinada pelo método da separação de variáveis.

a) (40%) O método da energia de Rayleigh é um método aproximado para estimar a frequência fundamental. Indicar em que princípio(s) se baseia, caracterizar a função de aproximação utilizada e a frequência estimada.



b) (60%) A figura representa uma viga suportada por uma suspensão elástica de rigidez distribuída. Isolar um elemento infinitesimal e estabelecer a(s) equação(ões) de equilíbrio dinâmico usando a teoria das vigas finas de Euler-Bernoulli.



1) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma barra rígida em forma de T articulada no ponto **O** e com uma massa concentrada m em cada uma das extremidades. A massa da barra é desprezável em face das massas concentradas. No ponto **A**, estão ligadas à barra uma mola de rigidez k e um amortecedor de constante de amortecimento c. No ponto **B**, está ligada à barra uma mola de rigidez k. A outra extremidade desta última mola está submetida a um deslocamento $s(t)$ na vertical. As oscilações angulares da barra são pequenas. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m, as molas não estão deformadas. Se, com $s(t) = 0$, for aplicada ao sistema uma perturbação inicial tal que $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 \neq 0$ rad/s, o sistema responde conforme se representa na figura abaixo.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Para resolver as alíneas seguintes, admitir que a equação de movimento é,
$0.015\ddot{\theta}(t) + 0.0025c\dot{\theta}(t) + (0.005k - 0.4905)\theta(t) = 0.05ks(t)$.

Determinar,

b) (10%) a razão de amortecimento ξ;

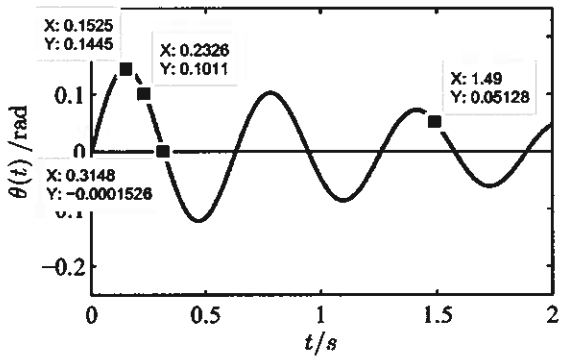
c) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n;

d) (10%) a constante de rigidez k das molas;

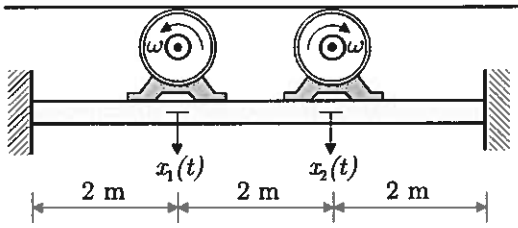
e) (10%) a constante de amortecimento c;

f) (15%) a energia dissipada pelo amortecedor quando, após aplicação da perturbação inicial descrita acima, o sistema regressa ao estado de repouso.

g) (20%) Para $a = 0.05$ m e $s(t) = 5 \times 10^{-3}\cos(\omega t)$ m, considerando apenas o regime estacionário, determinar a(s) frequência(s) de excitação de modo que a amplitude do deslocamento de cada uma das massas seja igual a 0.01 m e que o ângulo de fase entre o deslocamento $s(t)$ e a rotação $\theta(t)$ seja superior a $\pi / 2$.



Resposta livre ou natural



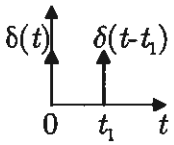
2) (4 val.) Uma máquina de 350 kg é montada a 2 m do apoio esquerdo de uma viga bi-encastrada com 6 m de comprimento, enquanto que uma máquina de 450 kg é colocada a 2 m do apoio direito. Em funcionamento, as máquinas exercem na viga forças $f_1(t)$ e $f_2(t)$, segundo $x_1(t)$ e $x_2(t)$ respectivamente.

a) (20%) Estabelecer a matriz dos coeficientes de flexibilidade.
b) (10%) Calcular a matriz de rigidez.
c) (10%) Escrever as equações do movimento.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

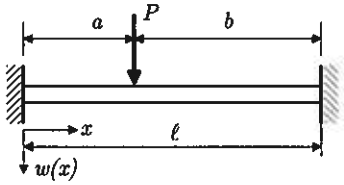
$$\begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1128\times10^7 & -0.77550\times10^6 \\ -0.77550\times10^6 & 0.1128\times10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

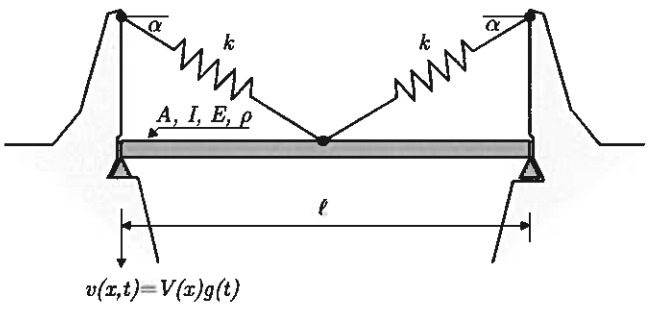
d) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.
e) (10%) Escrever as equações do movimento na base modal.
f) (30%) Considerar que o sistema, em repouso, é submetido a duas forças impulsivas $f_1(t) = F_1\delta(t)$ e $f_2(t) = F_2\delta(t-t_1)$, sendo a primeira aplicada segundo $x_1(t)$ no instante $t = 0$ e a segunda segundo $x_2(t)$ no instante t_1 ($t_1 > 0$). Determinar o deslocamento $x_1(t)$ para $t > t_1$.



NOTA: A deflexão $w(x)$ da viga devida a uma carga estática P é dada pela expressão:

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2\right] & 0 \le x \le a \\ \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2 + \dfrac{\ell^3}{b^2}(x-a)^3\right] & a \le x \le \ell \end{cases}$$





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, de material com módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, está simplesmente apoiada e é suportada a meio vão por duas molas lineares elásticas de rigidez k conforme se representa na figura. As funções $V(x) = \delta \sin\dfrac{2\pi}{\ell}x$ e $V(x) = \delta \sin\dfrac{\pi}{\ell}x$ são funções admissíveis para o sistema podendo ser usadas com o método da energia de Rayleigh.

a) (20%) Esboçar graficamente e seleccionar, justificando, dentre as funções propostas, a mais adequada para estimar a frequência natural fundamental;
b) (10%) Calcular a energia cinética máxima, T_{max};
c) (20%) Calcular a energia elástica máxima, V_{max};
d) (10%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração. Exprimir o resultado em função de $k = \varepsilon EI / \ell^3$.
e) (20%) Discutir a validade da solução obtida na alínea anterior para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.
f) (20%) Determinar a frequência fundamental exacta para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.

Parte Teórica - Exame de Recurso - 2008-07-11

1) a) $$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

com $$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}\left(\omega_d (t-\tau)\right)$$

A resposta a uma solicitação impulsiva é:

$$x(t) = \frac{F^*}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}\left(\omega_d (t-\tau)\right)$$

É portanto uma resposta harmónica (com decaimento se $\xi > 0$) cuja amplitude máxima é igual a $\frac{F^*}{m\omega_d}$



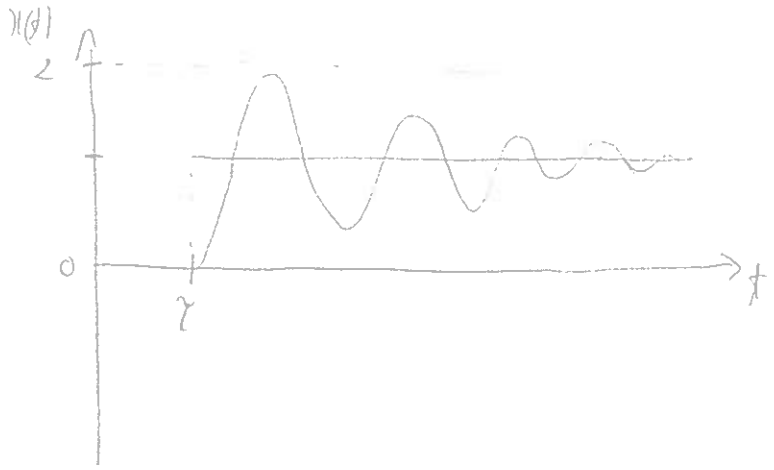
b) A resposta é do tipo:

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}\left(\omega_d (t-\tau)\right) d\tau$$

Simplificando: $\xi = 0$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d}\left(-\frac{1}{-\omega_d}\cos\left(\omega_d (t-\tau)\right)\right)_0^t = \frac{F_0}{m\omega_d}\left(\frac{1}{\omega_d} - \frac{1}{\omega_d}\cos\omega_n t\right)$$

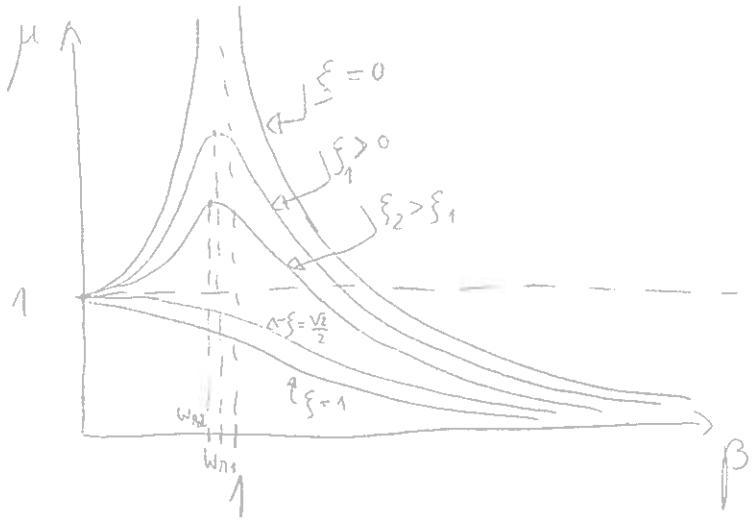
$$= \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left(1 - \cos\omega_n t\right) = \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\omega_n t\right)$$



c) A solicitação pode ser decomposta numa série de Fourier em que cada harmónico tem de frequência pw (com p sendo a ordem do harmónico). A resposta é obtida por sobreposição dos efeitos de cada harmónico de solicitação, sendo por sua vez um harmónico desfasado mas com a mesma frequência pw. Como se pode ver, o facto de o período global ter um valor que conduz a uma frequência abaixo da frequência natural não quer dizer que não haja um harmónico da resposta com que a sua frequência seja próxima da frequência natural. Quando isso acontece, sabe-se que o factor de amplificação aumenta muito, podendo tornar esse harmónico no harmónico predominante (e causando grande vibração).

d) Factor de amplificação dinâmica é o factor adimensional que multiplica o valor do deslocamento estático $\left(\frac{F}{k}\right)$ e que portanto traduz o efeito amplificador do movimento alternado do sistema no seu próprio deslocamento.

Define-se como: $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$



$$\omega_n = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

b) O impulso pode ser aplicado em instante genérico: $t = \tau$

Assim sendo a resposta a um impulso unitário vem:

$$h(t - \tau)$$

Seja a excitação arbitrária: $f(t)$

Então, para obter a expressão da resposta total do sistema é necessário integrar do instante inicial, $\tau = 0$, até ao instante pretendido $\tau = t$:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau$$

Notar que esta é a resposta estacionária, apenas.

c) O espectro de resposta transiente é uma representação gráfica da resposta máxima adimensional de um sistema com um grau de liberdade a um excitação transiente em função de uma razão adimensional da frequência ou do tempo.

Como vantagens temos de referir que permite perceber qual a amplitude máxima das amplitudes máximas e para que instante (ou frequência) ocorre, para além de que o facto de estar adimensionalizado torna este espetro mais geral (podendo ser aplicado para diferentes aplicações numéricas de um mesmo sistema).

d) Para entender este fenómeno basta analisar em separado as duas componentes das respostas (transitória e estacionária). A resposta transitória para sistemas não amortecidos é "permanente" (!) pois não há dissipação de energia. Esta resposta é harmónica e tem uma frequência ω_n. Se a esta resposta adicionarmos o efeito da solicitação harmónica, (na fase) percebemos que a magnitude da resposta crescerá indefinidamente porque nunca se dissipa energia.

3) ; 4) Não sabem. //

PARTE PRÁTICA

1) Feito anteriormente

2) ; 3) Não sabem //

1) A análise do comportamento dinâmico de um sistema consiste na determinação das suas propriedades dinâmicas e/ou na determinação da resposta a determinado tipo de solicitação.

Para um sistema vibratório com um grau de liberdade, ligeiramente amortecido e com condições iniciais nulas, designando a função de resposta impulsiva por $h(t)$,

a) estabelecer a expressão da resposta $x(t)$ a uma solicitação transiente genérica $f(t)$.

Caracterizar e esboçar graficamente a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

b) solicitação impulsiva aplicada no instante $t=\tau$;

c) solicitação em degrau aplicada no instante $t=\tau$.

Para uma solicitação $f(t)$ harmónica, esboçar graficamente em função da frequência e para dois valores distintos da razão de amortecimento,

d) a amplitude da resposta e a fase, e a amplitude da força transmitida ao apoio.

Normalmente, o valor do amortecimento (razão de amortecimento) dum sistema é determinado experimentalmente.

e) Referir sucintamente dois métodos expeditos de identificação da razão de amortecimento.

2) A análise do comportamento dinâmico de um sistema pode basear-se num modelo discreto com n graus de liberdade, cujo modelo espacial é do tipo $[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$.

a) Definir coeficientes de influência de flexibilidade e de rigidez;

b) Estabelecer a relação existente entre a matriz de flexibilidade e a matriz de rigidez;

c) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez do modelo espacial.

3) O comportamento dinâmico de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}=\{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\}=\{\dot{x}\}_0$.

a) Indicar as propriedades em que assenta a técnica da análise modal e o interesse desta técnica na determinação do regime forçado;

b) Justificar a utilização da análise modal truncada. Comentar a influência, na precisão da resposta, dos modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada.

c) Indicar os pressupostos dos métodos de integração directa das equações diferenciais do movimento;

d) Caracterizar o método das diferenças finitas como método de integração directa.

4) O comportamento dinâmico de um sistema contínuo é descrito por uma equação diferencial de derivadas parciais e respectivas condições de fronteira e condições iniciais.

a) Exprimir, numa forma genérica, a resposta $v(x,t)$ duma viga a uma solicitação $f(x,t)$, utilizando a sobreposição modal;

b) Comentar a influência do número de modos naturais de vibração, considerados na análise modal truncada, na precisão da resposta da viga em termos em termos do deslocamento $v(x,t)$, do momento fletor $M_f(x,t)$ e do esforço transverso $T(x,t)$.

1) O rotor de um instrumento de medida é controlado por uma mola de torção e um amortecedor viscoso de rotação montados nas suas extremidades.

A massa do rotor é de 50×10^{-3} kg e o seu raio de giração em relação ao seu eixo de rotação é de 12×10^{-3} m.

Quando posto a vibrar, o rotor realiza uma oscilação completa em 4.2 s, sendo a razão entre duas amplitudes consecutivas de $^{169}/_{3}$.

Determinar:

a) a razão de amortecimento ξ;
b) a frequência natural angular não amortecida ω_n;
c) a rigidez k_t da mola de torção;
d) a constante c de amortecimento viscoso de rotação.

Se o rotor, inicialmente em repouso, receber um impulso que lhe provoca uma rotação máxima de 25°, determinar:

e) o tempo que demorou a rodar 25°;
f) a velocidade angular inicial provocada pelo impulso;
g) a energia fornecida pelo impulso.

2) A figura representa uma ponte constituída por duas vigas metálicas simplesmente apoiadas sobre as quais assentam 5 placas de betão de massa m. Cada uma das vigas possui um comprimento ℓ, uma secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e material de módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ.

Admitindo como aproximação da forma natural fundamental de vibração a solução exacta da viga simplesmente apoiada, e utilizando o método da energia de Rayleigh,

a) Determinar uma estimativa da frequência natural fundamental;
b) Comparar o resultado obtido com a solução exacta para uma viga simplesmente apoiada de massa equivalente (distribuição uniforme da massa das placas sobre ambas as vigas). Comentar.

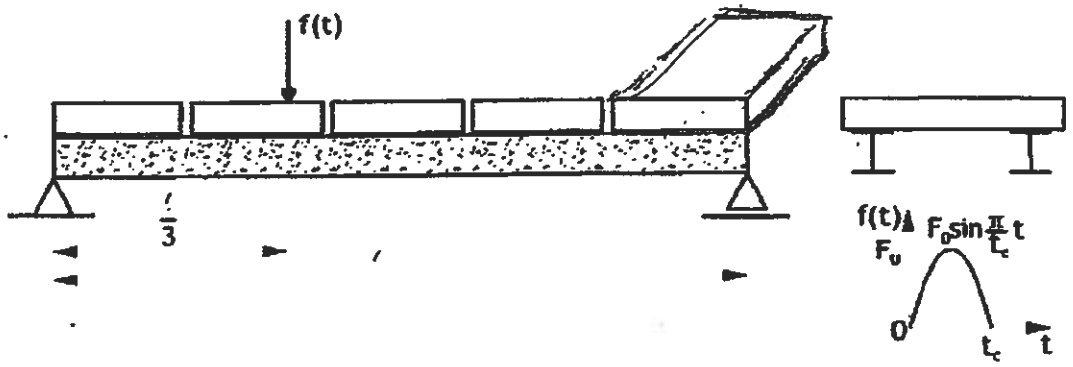
Utilizando as funções de aproximação $\psi_1(x)=\sin\frac{\pi}{\ell}x$ e $\psi_2(x)=\sin\frac{2\pi}{\ell}x$, e o método de Rayleigh-Ritz,

c) Determinar uma estimativa das duas primeiras frequências naturais e das respectivas formas naturais de vibração;
d) Representar graficamente a aproximação das formas naturais;

Admitindo uma distribuição uniforme da massa das placas sobre ambas as vigas, para a solicitação representada na figura e actuante sobre cada uma das vigas, e com os valores numéricos seguintes,

$$\ell=12\text{ m}\quad E=210\text{ GPa}\quad I=4.8\times10^{-4}\text{ m}^4\quad \rho A=90.7\text{ kg/m}\quad m=3000\text{ kg}\quad t_c=0.33\text{ s}$$

e) Determinar, usando os três primeiros modos naturais de vibração, o deslocamento e o momento fletor máximos a meio vão das vigas. Comentar os resultados obtidos.



Exame 2004-01-16

Parte teórica

1) a) Seja $h(t)$ a resposta ao impulso para o instante $t=0$.

Então, para o instante genérico $t=\tau$:

$$h(t-\tau)$$

Então, a resposta a uma solicitação genérica $f(t)$ no instante infinitesimal $d\tau$ vem:

$$f(\tau)\, d\tau \cdot h(t-\tau)$$

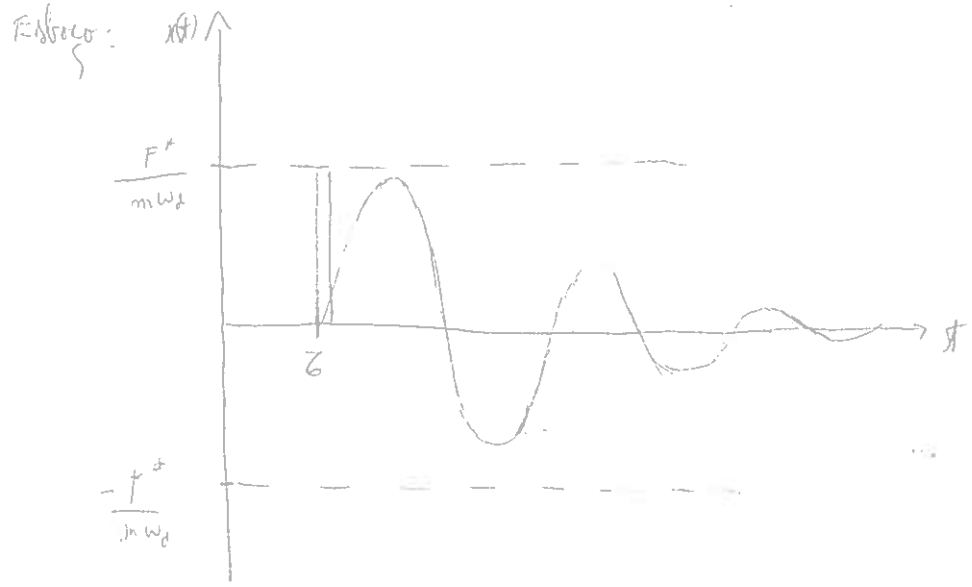
Integrando até ao instante genérico $\tau = t$:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{c.q.d.}$$

b) $$x(t) = \frac{F^*}{m\omega_d}\, e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \cos\left(\omega_d (t-\tau)\right), \quad t > \tau$$

Resposta harmónica (com decaimento se $\xi > 0$, como é o caso), cuja amplitude máxima pode ir até $\frac{F^*}{m\omega_d}$, com F^* sendo o valor da força impulsiva aplicada.

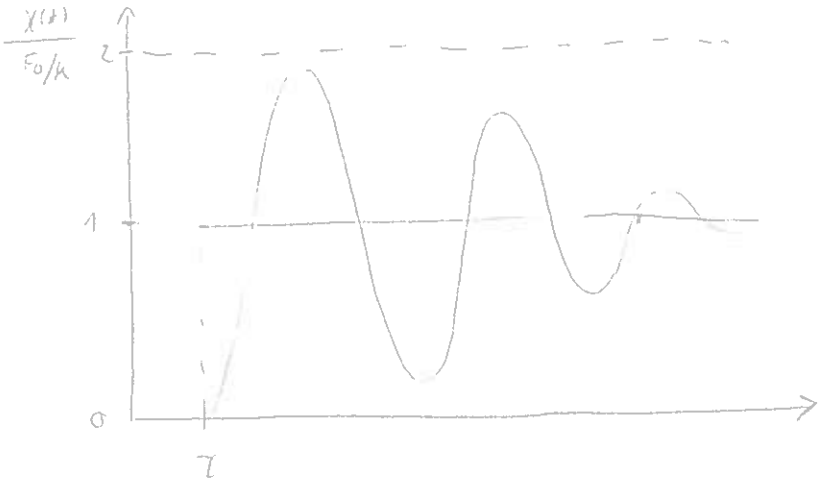
Esboço:



c) Solicitação degrau

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \cos(\omega_d(t-\tau))\, d\tau \quad , \quad t > \tau$$

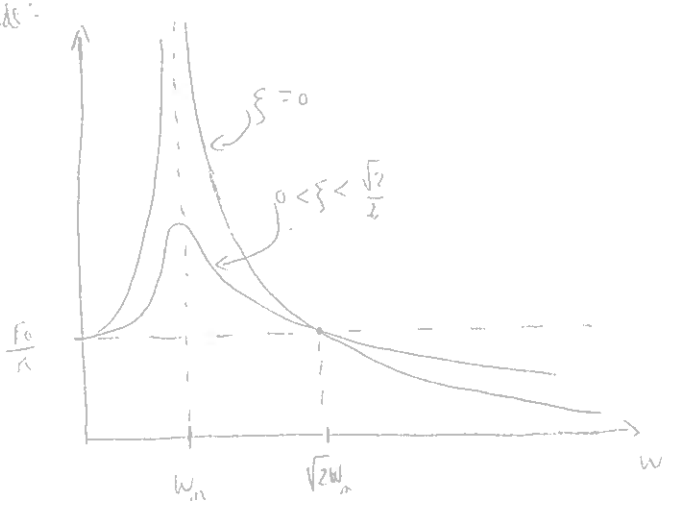
É uma resposta harmônica em torno da posição $\frac{F_0}{k}$ (deslocamento estático), que pode atingir $\frac{2F_0}{k}$ e 0.



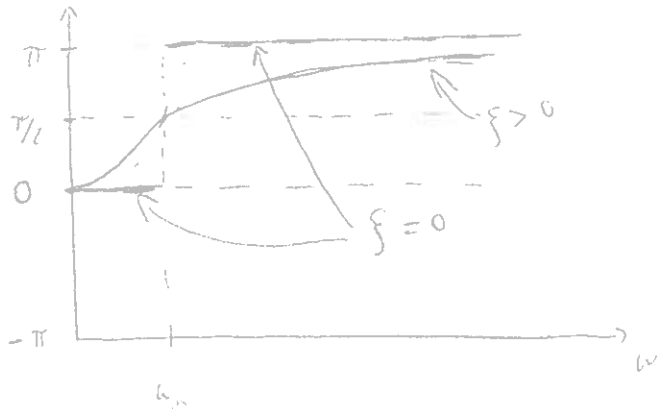
d)

$$X(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad ; \quad \phi = \arctan \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Amplitude:

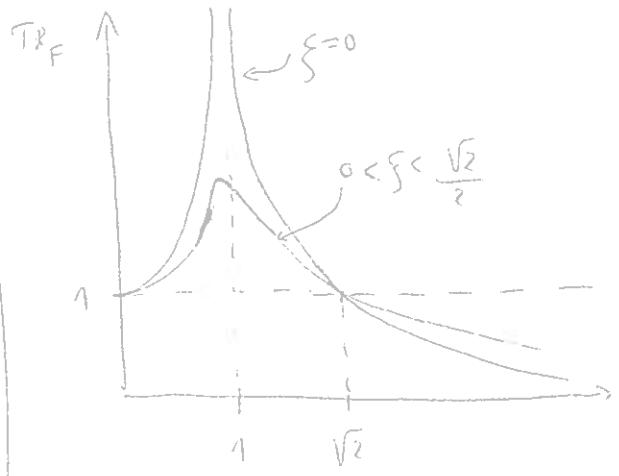


Fase:



Força transmitida ao apoio:

$$TR_F = \frac{F_T}{F} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



Basta multiplicar pela amplitude da força de solicitação

2) Método 1:

- Provocar uma perturbação inicial (de deslocamento ou velocidade) e medir a resposta livre ou natural do sistema. Em seguida determinar o período e com pelo menos 2 pontos à distância de N vezes o período da resposta aplicar o método do decremento logarítmico para obter ξ:

$$\ln \frac{x(t_1)}{x(t_2 = t_1 + NT)} = \xi \omega_n T \cdot N \quad , \quad \text{com} \quad N \in \mathbb{N}$$

Método 2:

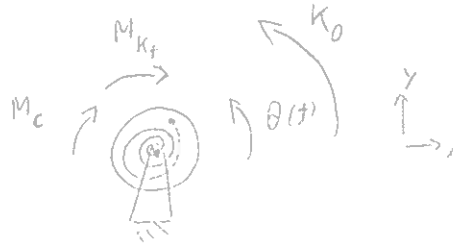
- Para obter uma estimativa da razão de amortecimento também se pode usar o método da meia-potência ("half-power bandwidth method"). Este método baseia-se na utilização de 3 pontos de frequência, obtidos através do sinal da Função de Resposta em Frequência, ao invés de se utilizar o sinal da resposta no tempo (como é utilizado no método do decremento logarítmico). A cada frequência natural corresponde um máximo no espectro da resposta em frequência. 3 dB abaixo desse máximo encontramos 2 pontos que correspondem à meia-potência. Quando maior o amortecimento maior é a banda de frequências entre estes 2 pontos. Portanto, através dessa relação pode-se obter ξ: $\left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} = 2\xi \right| = \frac{1}{Q}$

2) ; 3) ; 4) Não sabem

Parte Prática

1) $i_z = \sqrt{\frac{I_{33}}{m}} \Rightarrow I_{33} = m \cdot i^2 = 50\times10^{-3} \times (12\times10^{-3})^2 = 7,2\times10^{-6}\ kg\ m^2$

$T = 4,2\ s \Rightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{4,2} \cong 1,4960\ rad/s$



a) $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{169}{3}$ Por duas amplitudes sucessivas estou a considerar deslocamentos separados por um período inteiro (e não meio)

$M_{Kf} = K_f\,\theta \quad ; \quad M_c = C \cdot \dot{\theta}$

$$\vec{H}_0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 7,2\times10^{-6} \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,2\times10^{-6}\,\dot{\theta} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{K}_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,2\times10^{-6}\,\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Eq. diferencial do movimento.

$$-K_f \cdot \theta - C \cdot \dot{\theta} = 7,2\times10^{-6}\,\ddot{\theta} \Rightarrow 7,2\times10^{-6} \cdot \ddot{\theta}(t) + C \cdot \dot{\theta}(t) + K_f \theta(t) = 0$$

$$\theta(t) = A\, e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \frac{A\, e^{-\xi\left(\frac{2\pi}{4,2}\right)\cdot(t)}}{A\, e^{-\xi\left(\frac{2\pi}{4,2}\right)\cdot(t+4,2)}} = \frac{169}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\left[-\xi\left(\frac{2\pi}{4,2}\right)t + \xi\left(\frac{2\pi}{4,2}\right)t + \xi\left(\frac{2\pi}{4,2}\right)\times4,2\right]} = \frac{169}{3} \Rightarrow \xi \cong 0,6416$$

b) $\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 1,9503 \text{ rad/s}$

c) $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow K_t \cong 2,739 \times 10^{-5} \text{ N m/rad}$

(K_t = K_{eq}; $m_{eq} = 7,2 \times 10^{-6}$)

d) $\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} \iff \xi = \frac{c}{2 m_{eq} \cdot \omega_n} \Rightarrow c \cong 1,802 \times 10^{-5} \text{ N m s}$

e) Resposta ao impulso:

$$\theta(t) = F^* \frac{1}{m_{eq} \omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t$$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{F^*}{m_{eq} \omega_d} \cdot \xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t + \frac{F^*}{m_{eq}} e^{-\xi \omega_n t} \cos \omega_d t = 0$$

$$\Rightarrow \cos \omega_d t - \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d t = 0 \Rightarrow \sqrt{1^2 + \left(\frac{\xi \omega_n}{\omega_d}\right)^2} \cos(\omega_d t + \phi) =$$

$$\Rightarrow \omega_d t + \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff t = \frac{1}{\omega_d}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + k\frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\text{com } \phi = \arctan\left(\frac{-\frac{\xi \omega_n}{\omega_d}}{1}\right) = \arctan\left(-\frac{\xi \omega_n}{\omega_d}\right)$$

Assim: $t = \frac{1}{1,4960}\left[-\arctan\left(-\frac{0,6416 \times 1,9503}{1,4960}\right) + \frac{\pi}{2}\right] + k\frac{\pi}{1,4960} = \boxed{0,5844} + \frac{k\pi}{1,4960}$

Portanto, demorou 0,5844 s a atingir a rotação máxima.

f) $\dot{\theta}_0 = \dfrac{F^*}{m_{eq}}$

Determinemos F^*:

$$\frac{25\pi}{180} = \frac{F^*}{m_{eq}\,\omega_d}\, e^{-\xi\omega_n \overbrace{t}^{0,5844}} \operatorname{sen}(\omega_d \overbrace{t}^{0,5844}) \Rightarrow F^* \cong 1{,}27 \times 10^{5}\ Nm$$

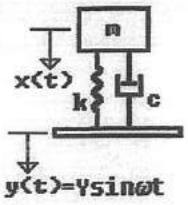
$$\dot{\theta}_0 = \frac{1{,}27\times10^{-5}}{7{,}2\times10^{-6}} \cong 1{,}768\ rad/s \approx 17\ rpm$$

g) A energia fornecida pelo impulso é de:

$$E_c = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\theta}_0^2 = \frac{1}{2} \times 7{,}2\times10^{-6} \times 1{,}768^2 \approx 1{,}125 \times 10^{-5}\ J$$

2) Não

1) (2 val)O sistema representado na figura está sujeito a um movimento harmónico da base.



a) (50%) Definir transmissibilidade absoluta TR_{abs} e representá-la graficamente em função da frequência de excitação ω e para 2 valores diferentes da razão de amortecimento ξ. Comentar e indicar eventuais pontos notáveis.

b) (50%) Definir transmissibilidade relativa TR_{rel} e representá-la graficamente em função da frequência de excitação ω e para 2 valores diferentes da razão de amortecimento ξ. Comentar e indicar eventuais pontos notáveis.

2) (1 val)Para um sistema vibratório com um grau de liberdade, amortecido e com condições iniciais nulas, caracterizar sucintamente a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

a) (25%) solicitação harmónica $f(t) = F \sin \omega t$;
b) (25%) solicitação periódica $f(t) = f(t+T)$;
c) (25%) solicitação impulsiva aplicada no instante $t = \tau$;
d) (25%) solicitação em "degrau" aplicada no instante $t = \tau$.

3) (1 val)A análise do comportamento dinâmico de um sistema assenta num modelo matemático desse sistema. Para um sistema amortecido com um grau de liberdade,

a) (60%) Definir e estabelecer a expressão da função de resposta em frequência de tipo receptância;

b) (40%) Representar graficamente a função de resposta em frequência mobilidade sob a forma do diagrama de Bode e do diagrama de Nyquist, indicando aspectos notáveis destas representações.

4) (1 val)Os transdutores de vibração permitem medir o deslocamento ou a aceleração do estado vibratório de um sistema mecânico.

c) (50%) Representar as características de transmissibilidade e indicar as gamas de frequência de funcionamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração;
d) (50%) Caracterizar, justificando, a frequência natural e o atravancamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

5) (2 val)O comportamento vibratório de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\} = \{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\} = \{\dot{x}\}_0$. A resposta do sistema pode ser determinada por integração directa das equações do movimento ou por análise modal.

a) (25%) Indicar a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal e o interesse desta técnica na determinação do regime forçado;
b) (25%) Justificar a utilização da análise modal truncada. Comentar a selecção dos modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada.
c) (25%) Em que condições os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para determinar o regime forçado do sistema amortecido? Demonstrar.
d) (25%) Indicar os pressupostos dos métodos de integração directa das equações diferenciais do movimento. Caracterizar o método das diferenças finitas como método de integração directa.

6) (1 val) Responder, em alternativa, à questão 6.1 ou 6.2.

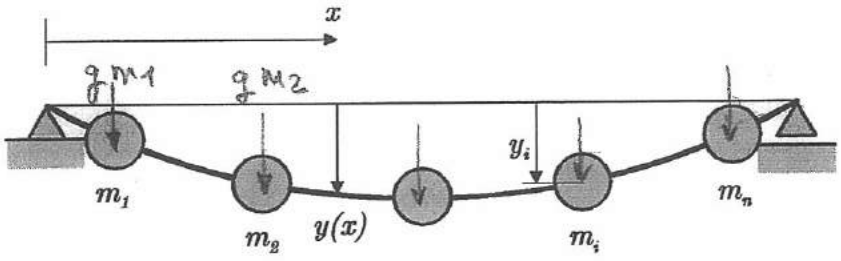
→

6.1) A equação diferencial do movimento axial forçado de uma barra (tracção-compressão) escreve-se como sendo $\rho A\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EA\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=f(x,t)$ **e as formas naturais de vibração são representadas pelas funções características** $U_r(x), r=1,\ldots,\infty$.

a) (40%) Escrever as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das formas naturais $U_r(x), r=1,\ldots,\infty$;

b) (60%) Demonstrar como a projecção da equação diferencial parcial na base modal ou natural conduz a um conjunto de equações diferenciais ordinárias independentes.

6.2) A figura representa a deformada estática $y(x)$ **de uma viga simplesmente apoiada sob a acção do peso próprio de uma série de massas concentradas** $m_i, i=1,\ldots,n$ **colocadas ao longo do comprimento** ℓ **da viga.**



Admitindo a deformada estática como função de aproximação para a forma fundamental de vibração de flexão da viga, desprezando a massa da viga e utilizando o quociente de Rayleigh,

a) (100%) demonstrar que a estimativa da frequência fundamental de flexão é dada pela expressão

$$\omega=\left(\frac{g\sum_{i=1}^{n}m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i y_i^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Justificar a demonstração.

$W=\frac{1}{2}m_i g y_i = V_{max}$

Vibrações e Ruído

2ª Parte

Exame de 1ª Chamada de 2007-06-20

Parte Teórica

5). a) A técnica da análise modal assenta no facto de ao se aplicar uma transformação linear com a matriz modal às coordenadas generalizadas $\{x(t)\}$ (conjuntamente com a propriedade de ortonormalidade dos vectores modais se conseguir o desacoplamento simultâneo em termos elásticos e em termos de inércia das n equações de movimento, sendo cada uma das equações idêntica à equação diferencial de movimento do sistema com um grau de liberdade, no caso do Regime Não Amortecido. Se o regime for amortecido, apenas se conseguir o desacoplamento se a matriz de amortecimento verificar a condição de Caughey (ou uma condição mais restrita: condição de proporcionalidade).

b) A análise modal truncada consiste na determinação da resposta do sistema considerando apenas alguns modos naturais do sistema, isto é, utilizando uma base modal truncada de dimensão p com $p \ll n$. Assim pode o esforço de cálculo ser substancialmente reduzido e não raras vezes sem grande perda de precisão nos valores obtidos. De referir

que os modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada devem ser os modos que mais contribuem para a resposta do sistema, nomeadamente, os modos que estão contidos na banda de frequências do espectro da solicitação aplicada.

c) Como referi em a), apenas quando a matriz de amortecimento verifica as condições de Caughey (ou, mais restritamente, as condições de proporcionalidade). Condição de proporcionalidade:

$$[C] = \alpha [m] + \beta [k]$$

Indo ao sistema de eq. dif. e sendo: $\{x(t)\} = [\Phi] \{\eta(t)\}$

$$[m][\Phi]\{\ddot{\eta}(t)\} + \left(\alpha [m] + \beta [k]\right)[\Phi]\{\dot{\eta}(t)\} + [k][\Phi]\{\eta(t)\} =$$

$$= \{f(t)\}$$

Pre-multiplicando por $[\Phi]^T$ e considerando a prop. de ortonormalidade dos vetores modais: $[\Phi]^T [m] [\Phi] = [I]$ e $[\Phi]^T [k] [\Phi] = [\Omega^2]$

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{\left(\alpha [I] + \beta [\Omega^2]\right)}_{(\alpha+\beta)[\Omega^2]} \{\dot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$$

Que são matrizes diagonalizadas c.q.d.

d) Os métodos de integração directa das eq. diferenciais de movimento assentam nos seguintes pressupostos:

- verificação da eq. diferencial apenas em instantes discretos t_i separados por intervalos de tempo Δt, e não para todo o valor da variável t
- estabelecimento de determinado tipo de variação do deslocamento $x(t)$, da velocidade $\dot{x}(t)$ ou da aceleração $\ddot{x}(t)$ dentro de cada intervalo de tempo Δt

O método das diferenças finitas lagia-se na caracterização da velocidade ($\dot{x}(t)$) e da aceleração ($\ddot{x}(t)$) da resposta do sistema através do valor do deslocamento $x(t)$ em pontos discretos do domínio da eq. diferencial de movimento, tornando o sistema de equações diferenciais num sistema de equações algébricas.

↳ Caracterização do método: É um método explícito de integração no qual a obtenção da resposta em deslocamento $\{x\}^{t+\Delta t}$ no instante $t = t_i + \Delta t$ é feita a partir da equação de equilíbrio dinâmico no instante $t = t_i$. Os refere que para o cálculo de $\{x\}^{t+\Delta t}$ também é necessário $\{x\}^{t-\Delta t}$ pelo que o método não é de arranque próprio (pelo menos no caso do método das diferenças finitas centradas)

6.1 a) Propriedade de ortonormalidade em relação à massa

$$\int_0^l \rho A \, U_r(x) \, U_s(x) \, dx = \delta_{rs} \qquad r, s = 1, 2, \ldots, \infty$$

com $\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & , \; r = s \\ 0 & , \; r \neq s \end{cases}$

Propriedade de ortonormalidade em relação à rigidez:

$$\int_0^{\ell} \frac{d U_s(x)}{dx} \, EA(x) \, \frac{d U_n(x)}{dx} \, dx = \delta_{n,s} \qquad n, s = 1, \ldots, \infty$$

com $\delta_{ns} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = s \\ 0 & \text{se } n \neq s \end{cases}$

b) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \, \eta_n(t) \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty$

Considerando que: $f(x,t) = p(x) \, g(t)$ e indo à eq. diff:

$$\rho A \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \, \ddot{\eta}_n(t) \right) - \frac{d}{dx} \left(EA \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d U_n(x)}{dx} \right) \eta(t) = p(x) \, g(t)$$

Multiplicando por $U_s(x)$ e integrando para o comprimento l da barra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) \int_0^{\ell} \rho A \, U_s(x) \, U_n(x) \, dx - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^{\ell} U_s(x) \frac{d}{dx} \left(EA \frac{d U_n(x)}{dx} \right) dx$$

$$= \left(\int_0^{\ell} U_s(x) \, p(x) \, dx \right) \cdot g(t)$$

Integrando por partes o 2º termo

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^{\ell} U_s(x) \frac{d}{dx} \left(EA \frac{d U_n(x)}{dx} \right) dx = \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \, U_s(x) \, EA \frac{d U_n(x)}{dx} \right]_0^{\ell} \quad (= 0 \text{ (cond. f.)})$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^{\ell} \frac{d U_s(x)}{dx} \, EA \, \frac{d U_n(x)}{dx} \, dx$$

. Ficando o sistema:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \int_0^{\ell} \rho A\, U_s(x)\, U_n(x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \int_0^{\ell} \frac{dU_s(x)}{dx} EA \frac{dU_n(x)}{dx}\, dx =$$

$$= \left(\int_0^{\ell} U_n(x)\, p(x)\, dx \right) g(t)$$

Assim, pelas propriedades de ortonormalidade em relação à massa (ρA) e à rigidez (EA) conclui-se que se chegou a um conjunto de equações diferenciais ordinárias independentes

c. q. d.

---

[1] (continua) volta [1]

6.2. $$\omega_n^2 = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI(x) \left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \sum_{c\beta m}}{\frac{1}{2}\int_0^{\ell} \rho A(x)\, V(x)^2\, dx + \sum_{c\beta m}^{*}}$$ ← Sistema contínuo

Mas como neste caso se despreza a massa então temos um sistema discreto com n graus de liberdade. Desta forma o Quociente de Rayleigh fica:

$$R(\{v\}) = \frac{\{v\}^T [k] \{v\}}{\{v\}^T [m] \{v\}}$$

Sendo: $\{v\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$ e $[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}$

Para determinar o numerador basta saber que o mesmo representa o dobro da energia potencial máxima do sistema. Ora para cada massa:

$$k_i = \frac{P_i}{Y_i} = \frac{m_i g}{Y_i} \qquad k_{ij} =$$

Logo, a energia potencial fica

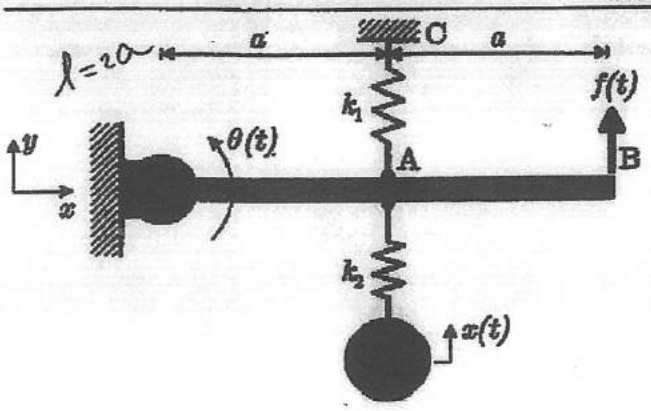
$$\frac{1}{2} k_i Y_i^2 = \frac{1}{2} \frac{m_i g}{Y_i} \cdot Y_i^2 = \frac{m_i g Y_i}{2}$$

Logo o Numerador fica: $\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i g Y_i}{2} = g \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i$

O Denominador fica: $\{Y_1, \dots Y_n\} \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i^2$

Logo $R(\{v\}) = \frac{g \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i^2}$

Como $R(\{v\}) = \omega^2 \Rightarrow \omega = \left[\frac{g \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i^2} \right]^{1/2}$ c.q.d



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por uma barra rígida de massa m_1, de comprimento ℓ, articulada no ponto O, ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de constante de rigidez k_1 e sobre a qual actua uma força $f(t)$ no ponto B. No ponto A está ligada uma mola linear elástica de constante de rigidez k_2 da qual está suspensa uma massa concentrada m_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $x(t)$.

a) (30%) Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para

$$k_1 = 10k \qquad k_2 = 2k \qquad m_1 = 6m \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\,\text{m},$$

b) (15%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

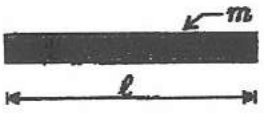
c) (15%) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.

Para $k = 25600$ N/m e $m = 1$kg,

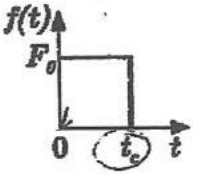
d) (20%) Determinar a amplitude $\Theta(\omega)$ da resposta da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 178$ rad/s. Esboçar graficamente a variação da amplitude $\Theta(\omega)$ em função da frequência de excitação ω, assinalando eventuais pontos notáveis.

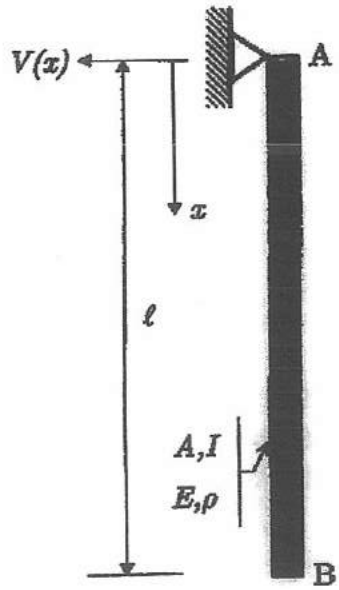
e) (20%) Determinar o valor máximo da resposta $x(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_c = 0.0137$ s. Comentar.

Nota:



$$J_G = \frac{1}{12}m\ell^2$$





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ está apoiada na extremidade $x = 0$ e está livre na extremidade $x = \ell$, conforme se representa na figura.

a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira da viga.

b) (15%) Discutir, justificando, as condições de aplicabilidade da função $V(x) = \alpha x - \delta \sin\frac{\pi}{\ell}x$ como aproximação da forma fundamental de vibração no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função.

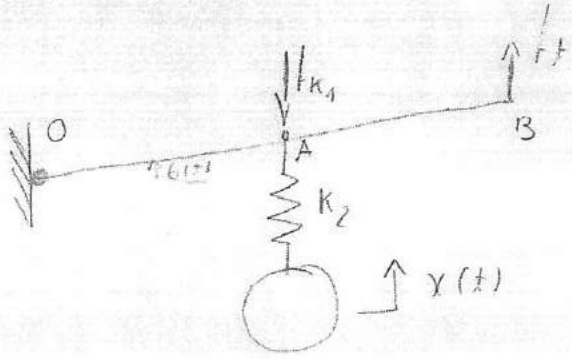
c) (30%) Calcular a energia potencial máxima, a energia cinética máxima e o quociente de Rayleigh para determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

d) (30%) Determinar o valor óptimo do parâmetro α e a estimativa óptima da frequência. Justificar o procedimento utilizado. Comparar com a solução exacta. Comentar.

e) (10%) Determinar as coordenadas de eventuais pontos nodais.

Parte Prática

2. a)



Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$$

$$J_O^b = J_A + m \overline{OA}^2 \Rightarrow J_O = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 =$$

$$= J_O = \frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{1}{4_{(3)}} m_1 l^2 = \frac{4}{12} m_1 l^2 = \frac{m_1 l^2}{3}.$$

$$\text{m.C.: } T = \frac{1}{2} J_O \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{x}(t)\right]^2$$

$$\text{m.Pot.: } V = \frac{1}{2} K_1 \left(\frac{l}{2} \sin \theta(t)\right)^2 + \frac{1}{2} K_2 \left[x(t) - \frac{l}{2}\theta(t)\right]^2$$

Forças não conservativas: $Q_1 = f(t) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{l}{2} \sin\theta\right) = f(t) \frac{l}{2} \cos\theta = f(t) \cdot \frac{l}{2}$

$$Q_2 = f(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{l}{2} \sin\theta\right) = 0$$

Como $K_1 = 10\,k$; $K_2 = 2\,k$; $m_1 = 6\,m$; $m_2 = m$; $a = 0{,}5\,m$

Vem:

$$T = \frac{6m\,(2a)^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = 4ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2}\,10k\cdot\frac{(2a)^2}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}\times 2k\,(x - a\cdot\theta)^2 = 5ka^2\theta^2 + k(x-a\theta)^2$$

$$Q_1 = f(t)\cdot 2a$$

Considerando as eq. de Lagrange na forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} + \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial x} = Q_2 \end{cases}$$

Então:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 8ma^2\dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = 8ma^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 10ka^2\theta - 2ak(x - a\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{y} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2k(x - a\theta)$$

Conclui-se que as eq. de movimento são:

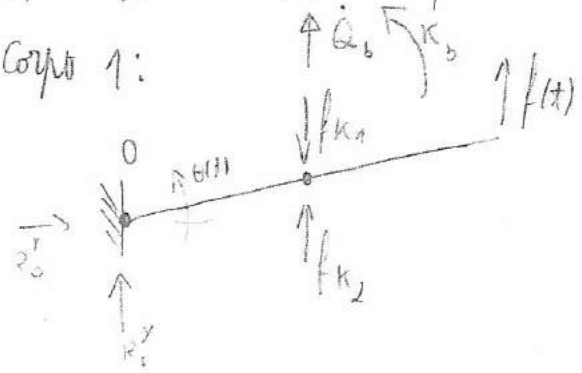
$$\begin{cases} 8ma^2\ddot{\theta}(t) + 10ka^2\theta(t) - 2ak\left(x(t) - a\,\theta(t)\right) = f(t)\cdot 2a \\ m\ddot{x}(t) + 2k\left(x(t) - a\,\theta(t)\right) = 0 \end{cases}$$

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 8ma^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10ka^2 + 2a^2k & -2ak \\ -2ak & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t)\cdot 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

a) * Vou resolver pela Mecânica Newtoniana (não era pedido)

Corpo 1:



$$\Sigma M_0 = K_b$$

$$\vec{Q}_b = m \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\,a \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{Q}}_b = m_1 \begin{vmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}\,a \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$K_b = K_G + \vec{OG} \times \dot{\vec{Q}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} m_1 (2a)^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ m_1 \ddot{\theta}\,a \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} m_1 (2a)^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \ddot{\theta}\,a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \underbrace{m_1}_{6m} a^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$f_{k_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ -k_1 a\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad f_{k_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ +k_2 (x - a\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

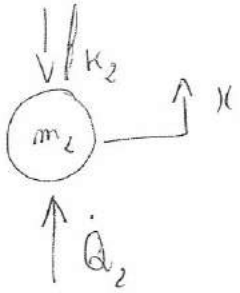
Então, a 1ª eq. de movimento fica:

$$-a(\overset{10k}{k_1 a\theta}) + a\,\overset{2k}{k_2}(x - a\theta) + f(t)\cdot 2a = \frac{4}{3}(6m)\,a^2\ddot{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{8ma^2\ddot{\theta}(t) + 10a^2 k\,\theta(t) - 2ak\left(x(t) - a\theta(t)\right) = f(t)\cdot 2a}$$

Igual à 1ª eq. obtida pelo método Lagrangeano

Corpo 2:



$$\Sigma F^x = Q_2^x \Rightarrow -\overset{2k}{k_2}(x - a\theta) = \overset{m}{m_2}\ddot{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m\ddot{x}(t) + 2k\left(x(t) - a\theta(t)\right) = 0}$$

Igual à 2ª eq. obtida pelo método Lagrangeano

b) Fazendo:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ X(\omega) \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\begin{bmatrix} 10ka^2 + 2a^2k - 8ma^2\omega^2 & -2ak \\ -2ak & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ X(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Então, fazendo $a = 0,5\ m$

$$\begin{vmatrix} 10k\,0,5^2 + 2\times 0,5^2 k - 8m\,0,5^2\omega^2 & -2\times 0,5\,k \\ -2\times 0,5\,k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \vee \quad \omega_2 \cong 1,5811\sqrt{\frac{k}{m}} \quad [rad/s]$$

Formas modais:

Modo 1:

$$-2\times 0,5\,k\ \Theta(\omega) + \left(2k - \lambda m \cdot \frac{k}{m}\right) X(\omega) = 0 \iff$$

$$\iff X(\omega) = \frac{k}{2k-k}\Theta(\omega) \iff X(\omega) = \Theta(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Modo 2:

$$-2\times 0,5\,k\ \Theta(\omega) + \left(2k - \lambda\left(2,5\frac{k}{m}\right)\right) X(\omega) = 0 \iff$$

$$\iff X(\omega) = \frac{k}{-0,5k}\Theta(\omega) \iff X(\omega) = -2\,\Theta(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

c)

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{\mu\}_1^T [m] \{\mu_1\}}} \{\mu\}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} 0,577 \\ 0,5774 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_2\} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} 0,4082 \\ -0,8165 \end{Bmatrix}$$

As eq. de movimento ficam:

$$[\underline{I}] \{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2] \{\eta(t)\} = [\underline{\Phi}]^T \{f(t)\} \Rightarrow$$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f(t) & 2a \\ 0 & \end{Bmatrix}^{0,5} \Leftarrow$$

$\omega_2 = 1,5811 \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25\,600 & 0 \\ 0 & 64000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} f(t) \\ \frac{1}{\sqrt{6}} f(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25600\, \eta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 64000\, \eta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} f(t) \end{cases}$$

1ª Eq.:

d) $\ddot{\eta}_1(t) + 25600\,\eta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} F \cos(178t)$

$$\eta_1(t) = \frac{\frac{F/\sqrt{3}}{25600}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\cancel{\xi}\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

Como: $\beta = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{178}{\sqrt{\frac{25600}{1}}} = 1{,}1125 > 1 \Rightarrow \phi = \pi$

$$\eta_1(t) \cong 9{,}490 \times 10^{-5} F \cos(178t - \phi)$$

2ª Eq.:

$$\ddot{\eta}_2(t) + 64000\,\eta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos(178t)$$

$\phi = 0$

Usando a mesma fórmula, com $\beta = \frac{\omega}{\omega_2} = 0{,}7036 < 1$

$\omega_2 = 1{,}5811\sqrt{\frac{25600}{1}}$

$$\eta_2(t) = \frac{\frac{F/\sqrt{6}}{64000}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{178}{1{,}5811\sqrt{\frac{25600}{1}}}\right)^2\right]^2 + (2\cancel{\xi}\beta)^2}} \cos(178t - \phi) \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \eta_2(t) \cong 1{,}263 \times 10^{-5} F \cos(178t - \cancel{\phi}^{0})$$

Então: $[\Phi] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \Rightarrow \Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1(t) + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_2(t)$$

$\Leftrightarrow \quad \theta(t) = 5{,}479 \times 10^{-5} F \underbrace{\cos(178t - \pi)}_{-\cos(178t)} + 5{,}156 \times 10^{-6} F \cos(178t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \theta(t) = -4{,}963 \times 10^{-5} F \cos(178t)$

Logo: $\boxed{\theta(\omega) = 4{,}963 \times 10^{-5} F}$ [rad].

Dúvida: Se os ϕ não fossem 0 e π rad como fazíamos para determinar $\theta(\omega)$?

OUTRA FORMA DE CALCULAR $\theta(\omega)$:

pág. 186

$$\begin{bmatrix} 10ka^2 + 2a^2k - 8ma^2\omega^2 & -2ak \\ -2ak & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(\omega) \\ X(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \cdot 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

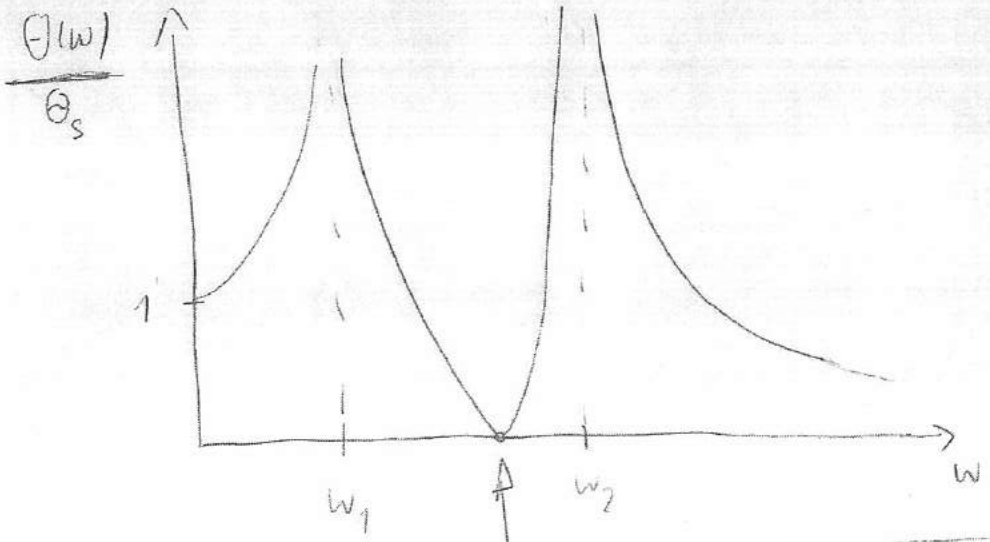
Substituindo valores $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \theta(\omega) = \frac{(2k - m\omega^2) \cdot 2aF - (-2ak) \times 0}{(10ka^2 + 2a^2k - 8ma^2\omega^2)(2k - m\omega^2) - (-2ak)(-2ak)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta(\omega) = -4{,}963 \times 10^{-5} F}$$

R Exactamente o mesmo resultado! Mas muito mais rapidamente

Representação gráfica de $\Theta(w)$ em função de w:



$(2K - m w^2) \cdot 2a F = 0 \Rightarrow w \approx 226{,}3 \text{ rad/s}$

2) Esta alínea resolve-se de forma semelhante ao **1º método** que apliquei para resolver a alínea anterior:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25600 & 0 \\ 0 & 64000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} & F_0 \\ 1/\sqrt{6} & F_0 \end{Bmatrix} \mu(t)$$

$$\frac{T_n}{2} = \frac{2\pi}{2\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_1 = 160 \text{ rad/s}} \approx 0{,}01963 \text{ s} > t_c = 0{,}0137 \text{ s}$$

$$\frac{T_n}{2} = \frac{\pi}{\omega_2 = 252{,}982 \text{ rad/s}} \approx 0{,}01242 \text{ s} < t_c = 0{,}0137 \text{ s}$$

Para $0 \leq t \leq \overset{t_c}{0{,}137}$:

$$\eta_1(t) = \frac{F_0/\sqrt{3}}{25600}\left(1 - \cos 160\, t\right)$$

$$\eta_2(t) = \frac{F_0/\sqrt{6}}{64000}\left(1 - \cos 252{,}982\, t\right)$$

Para $t > 0{,}0137$ s:

$$\eta_1(t) = \frac{F_0/\sqrt{3}}{25600}\left(\cos 160(t-0{,}0137) - \cos 160t\right)$$

$$\eta_2(t) = \frac{F_0/\sqrt{6}}{64000}\left(\cos 252{,}98(t-0{,}0137) - \cos 252{,}98t\right)$$

Como: $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$$\{\gamma(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \gamma(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1(t) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_2(t) \\ \frac{-2}{\sqrt{6}}\eta_2(t) \end{Bmatrix}$$

Logo:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1(t) - \frac{2}{\sqrt{6}}\eta_2(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{76800}\left(1-\cos 160t\right) - \frac{F_0}{192000}\left(1-\cos 252{,}98t\right) & ; 0 \le t \le t_c \ (0{,}0137\text{ s}) \\ \frac{F_0}{76800}\left(\cos 160(t-0{,}0137) - \cos 160t\right) - \frac{F_0}{192000}\left(\cos 252{,}98(t-0{,}0137) - \cos 252{,}98t\right) & ; t > t_c \end{cases}$$

Para calcular o máximo:

$$0 \le t \le 0{,}0137 \longrightarrow \dot{\chi}(t) = 0 \overset{\text{máquina}}{\Rightarrow} t_1 = 0{,}0 \ \vee \ t_2 \approx 0{,}0222 \ \wedge \ \vee \ldots$$

Então: $\chi(t)_{max}\Big|_{t=0{,}0137} \approx F_0 \times 1{,}045 \times 10^{-5}$ [m]

$$t > 0{,}0137 \longrightarrow \dot{\chi}(t) = 0 \overset{\text{máquina}}{\Rightarrow} t_1 \approx 0{,}0530 \text{ s} \ \vee \ t_2 \approx \ldots$$

Então:

$$t > 0{,}0137\ s \rightarrow x(t)_{max}\Big|_{t=0{,}0530\,s} \cong \boxed{F_0\ 2{,}865 \times 10^{-5}\ [m]}$$

R: Conclui-se que o valor máximo da resposta ocorre depois do Tempo de choque e é cerca de $F_0 \cdot 2{,}865 \times 10^{-5}$ m.

3. a)

Cond. geométrica

$$v(0,t) = 0 \Rightarrow V(0) = 0$$

Cond. natural

$$EI\,\frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2V(0)}{dx^2} = 0$$

cond. natural

$$EI\,\frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2V(l)}{dx^2} = 0$$

Cond. natural

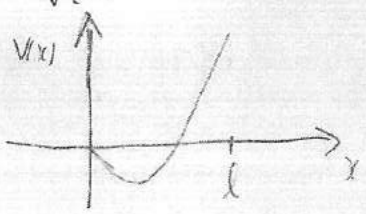
$$EI\,\frac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \frac{d^3V(l)}{dx^3} = 0$$

b) $$\frac{dV(x)}{dx} = \alpha - \frac{\delta\pi}{l}\cos\frac{\pi}{l}x$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \delta\frac{\pi^2}{l^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}x$$

derivável pelo menos 2 vezes ✓

$V(0) = 0 - \delta \operatorname{sen} 0 = 0$ compatível com a cond. fronteira geométrica



c)

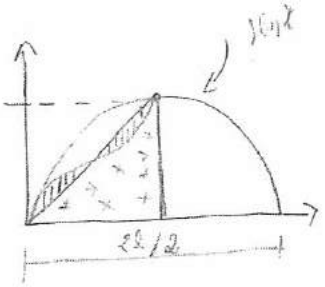
$$T_{max} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\alpha x - \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x \right)^2 dx + \underbrace{T^*_{c/m}}_{=0} \right) =$$

$$= \omega^2 \frac{\rho A}{2} \left(\alpha^2 \frac{l^3}{3} - \int_0^l 2 \alpha \delta x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right) dx + \int_0^l \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{l} x\right) dx \right) =$$

$$= \omega^2 \frac{\rho A}{2} \left[\alpha^2 \frac{l^3}{3} - 2\alpha\delta \left(\frac{l^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right) - \frac{l}{\pi} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right) \right)_0^l + \right.$$

$$\left. + \delta^2 \frac{l}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 \right] = \omega^2 \frac{\rho A}{2} \left[\alpha^2 \frac{l^3}{3} - 2\alpha\delta \frac{l^2}{\pi} + \frac{\delta^2 l}{2} \right]$$

$\int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{l} x\right) dx$



Área $= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{l}{2}}$

$$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \underbrace{V^*_{c/m}}_{=0} =$$

$$= \frac{EI}{2} \left[\frac{-15{,}503\, \delta^2 \left(l \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right) - \pi x \right)}{l^4} \right]_0^l =$$

$$= \frac{EI}{2} \left[\frac{-15{,}503\, \delta^2 (-\pi l)}{l^4} \right] = \frac{EI}{2} \left(\frac{48{,}705\, \delta^2}{l^3} \right)$$

$$R(V(x)) = w^2 = \frac{\frac{EI}{2}\left(\frac{48{,}705\,\delta^2}{l^3}\right)}{\frac{\rho A}{2}\left(\frac{\alpha^2 l^3}{3} - 2\alpha\delta\frac{l^2}{\pi} + \frac{\delta^2 l}{2}\right)} = \frac{EI \cdot 48{,}705\,\delta^2}{\rho A \cdot l^3\left(\frac{\alpha^2 l^3}{3} - 2\alpha\delta\frac{l^2}{\pi} + \frac{\delta^2 l}{2}\right)}$$

$$\text{logo: } w = \sqrt{R(V(x))} = \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \cdot \frac{6{,}979\,\delta}{\sqrt{\frac{\alpha^2 l^2}{3} - \frac{2\alpha\delta l}{\pi} + \frac{\delta^2}{2}}}$$

d) $$\frac{d\,R(V(x))}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{EI}{\rho A l^4} \cdot \frac{-\left(\frac{2\alpha l^2}{3} - \frac{2\delta l}{\pi}\right) 48{,}705\,\delta^2}{\left(\frac{\alpha^2 l^2}{3} - \frac{2\alpha\delta l}{\pi} + \frac{\delta^2}{2}\right)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha l^2}{3} - \frac{2\delta l}{\pi} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3 \times 2\delta \cancel{l}}{2 l^{\cancel{2}} \pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{3\delta}{\pi l}$$

Então:

$$w^{QR} = \frac{6{,}979\,\delta}{\sqrt{\frac{9\delta^2 \cancel{l^2}}{3\pi^2 \cancel{l^2}} - \frac{6\delta^2 \cancel{l}}{\pi^2 \cancel{l}} + \frac{\delta^2}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w^{QR} = \frac{6{,}979\,\delta}{\sqrt{\frac{\delta^2}{2} - \frac{3\delta^2}{\pi^2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w^{QR}_{\text{optimo}} = \frac{6{,}979}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi^2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \cong 15{,}7625 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

Solução exacta:

Pág 359:

$$\beta_2 l = 3{,}9266 \Rightarrow \omega_2 = 3{,}9266^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_2 \cong 15{,}4182 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

Comparação:

$$\text{Err} = \frac{|\omega^{ER} - \omega_2|}{\omega_2} \times 100 \cong \boxed{2{,}23\ \%}$$

2) $V(x) = 0 \Rightarrow \alpha x - \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right) = 0 \Rightarrow$

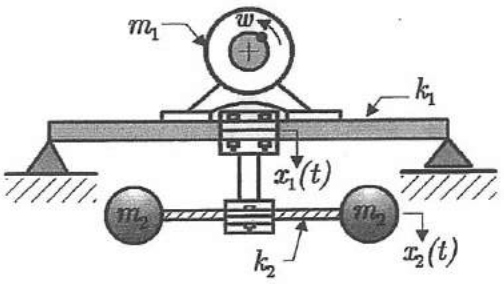
$$\Rightarrow \frac{3\delta}{\pi l} x - \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right) = 0 \Rightarrow \boxed{x \cong 0{,}747\,13\, l}$$

1)(2val) Para um sistema ligeiramente amortecido, caracterizar a resposta nas seguintes situações:

a) perturbação inicial de deslocamento;
b) solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ para $\omega \ll \omega_n$ e para $\omega \gg \omega_n$.
c) Definir factor de amplificação dinâmica e comentar a seguinte afirmação: " A amplitude de resposta em regime harmónico é controlada nas baixas frequências pela rigidez, nas frequências médias pelo amortecimento e nas altas frequências pela massa." Se achar conveniente, juntar um esboço gráfico.

2)(2val) A análise do comportamento dinâmico de um sistema discreto pode assentar no modelo espacial do sistema.

a) Indicar a(s) principal(s) vantagem(s) da utilização das equações de Lagrange no estabelecimento do modelo espacial. Como é considerado, normalmente, o mecanismo de amortecimento de tipo viscoso nas equações de Lagrange?
b) Indicar que tipo de acoplamento pode apresentar o modelo espacial e qual a sua origem;
c) Escrever, em notação matricial, as expressões da energia cinética e da energia potencial elástica. Caracterizar, justificando, estas duas formas energéticas.



3)(1 val) A figura representa um sistema vibratório ao qual foi acoplado um absorsor de vibrações sintonizado para a frequência de excitação.

a) Representar graficamente a amplitude de resposta do sistema principal antes e após a montagem do absorsor, indicando claramente eventuais pontos notáveis e a posição de funcionamento;
b) Referir as implicações da razão de massas no funcionamento do sistema e/ou na eficiência da solução.

4)(1 val) O isolamento de vibrações consiste em reduzir a grandeza de forças transmitidas por equipamentos para as suas fundações ou em reduzir o movimento de apoios móveis para os equipamentos.

a) Definir transmissibilidade em ambos os casos;
b) Discutir a eficiência do isolamento em termos da massa do equipamento e da rigidez da suspensão;
c) Justificar a razão pela qual, em geral, não se considera o amortecimento no dimensionamento de uma suspensão elástica;
d) Para uma excitação multi frequência, indicar, justificando, qual a frequência a considerar no dimensionamento da suspensão elástica.

5)(2 val) A resposta forçada de uma viga em flexão pode exprimir-se em termos do deslocamento lateral e/ou dos esforços internos e pode ser determinada por sobreposição modal truncada dos modos naturais de vibração.

a) Estabelecer uma comparação entre a equação característica (cujas soluções são as frequências e as formas naturais de vibração) de um sistema discreto e de um sistema contínuo;
b) Escrever as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das formas naturais de vibração de uma viga em flexão;
c) Discutir a selecção e a dimensão da base modal seleccionada para determinação da resposta forçada.
d) Designando as 4 primeiras frequências naturais de uma viga simplesmente apoiada por ω_1, ω_2, ω_3 e ω_4, representar graficamente a função de resposta em frequência de tipo receptância $\alpha_{\ell/2,\ell/3}(\omega)$ na banda de frequências $\left[0;\ 1.5\omega_4\right]$ indicando claramente a posição de cada uma das frequências naturais.

Exame de Recurso - 2007-07-12

2). a) A principal vantagem da utilização das equações de Lagrange consiste na não necessidade de recorrer a diagramas de corpo livre dos componentes de um sistema dinâmico.

O amortecimento viscoso é normalmente definido por:

$$Q_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

Sendo $F = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} c_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$

Com $\dot{q}$ dado as velocidades generalizadas e c_{rs} são os coeficientes de amortecimento, simétricos em r e s.

b) Pode ser um acoplamento de inércia, de rigidez e/ou de amortecimento. Estes acoplamentos são o resultado de uma interacção entre os movimentos das várias massas do sistema que se influenciam mutuamente.

c) $T = \{v\}^T [m] \{v\}$

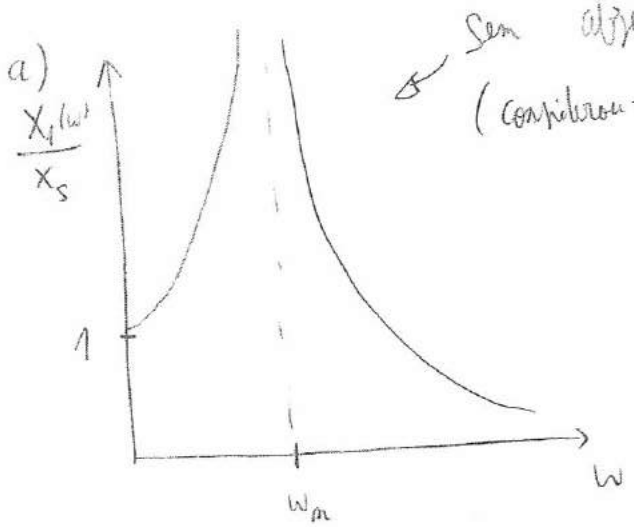
$V = \{v\}^T [k] \{v\}$

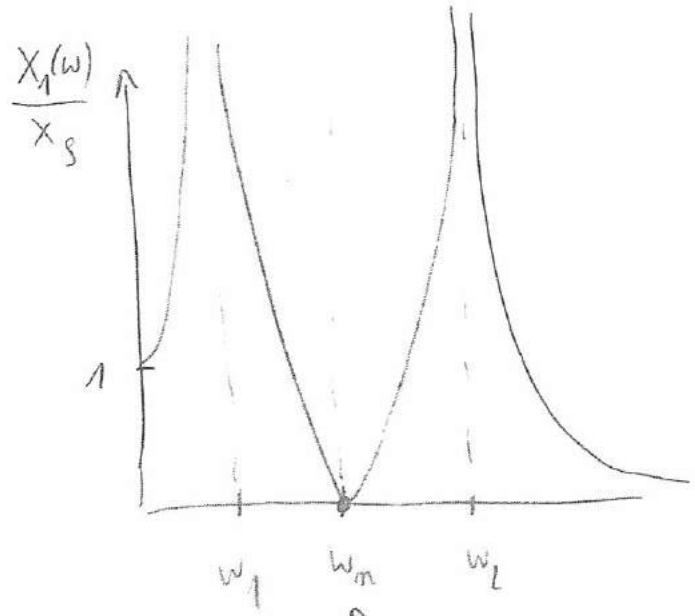
A energia cinética não pode ser negativa e apenas é nula quando todas as velocidades forem nulas. É portanto uma forma quadrática definida positiva e a matriz de massa é designa

da matriz definida positiva.

A energia potencial é, em geral, uma forma quadrática definida positiva se a matriz de rigidez é definida positiva. No entanto em sistemas semi-definidos a energia potencial pode ser nula sem que todos os deslocamentos o sejam, neste caso a energia potencial é uma função quadrática semi-definida positiva (e a matriz rigidez diz-se semi-definida positiva).

3. a)





Ponto de funcionamento

b) O aumento da razão de massas $\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$ conduz a um afastamento das frequências naturais ω_1 e ω_2 do sistema tornando viável a excitação do sistema para uma banda de frequências mais alargada. A solução torna-se mais eficiente para valores próximos da frequência de sintonização (que não sejam a própria frequência).

a) Não considerando o amortecimento:

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = 0$$

Assumindo um movimento harmónico síncrono: $\{x(t)\} = \{u\}\cos(\omega t - \phi)$

$$\left([K] - \omega^2[m]\right)\{u\}\cos(\omega t - \phi) = \{0\} \qquad (1)$$

$$\left|[K] - \omega^2[m]\right| = 0 \rightarrow \text{frequências naturais}$$

Substituindo em (1) obtemos as formas naturais de vibração.

No caso do problema característico de um sistema contínuo

$$-\mathcal{L}\left[K(x)\,\mathcal{L}(V(x))\right] = \omega^2 m(x) V(x)$$

As soluções $V(x)$ têm de verificar a equação diferencial e as condições de fronteira. Assim a solução da equação característica de um problema contínuo é constituída por uma infinidade de pares característicos formados por um valor característico e pela respectiva função característica (um pouco à semelhança dos sistemas discretos mas usando uma abordagem integral da equação diferencial).

b) Ortonormalidade em relação à massa:

$$\int_0^l \rho A(x)\, V_r(x)\, V_s(x)\, dx = \delta_{rs} \qquad r, s = 1, \ldots, \infty$$

Ortonormalidade em relação à rigidez:

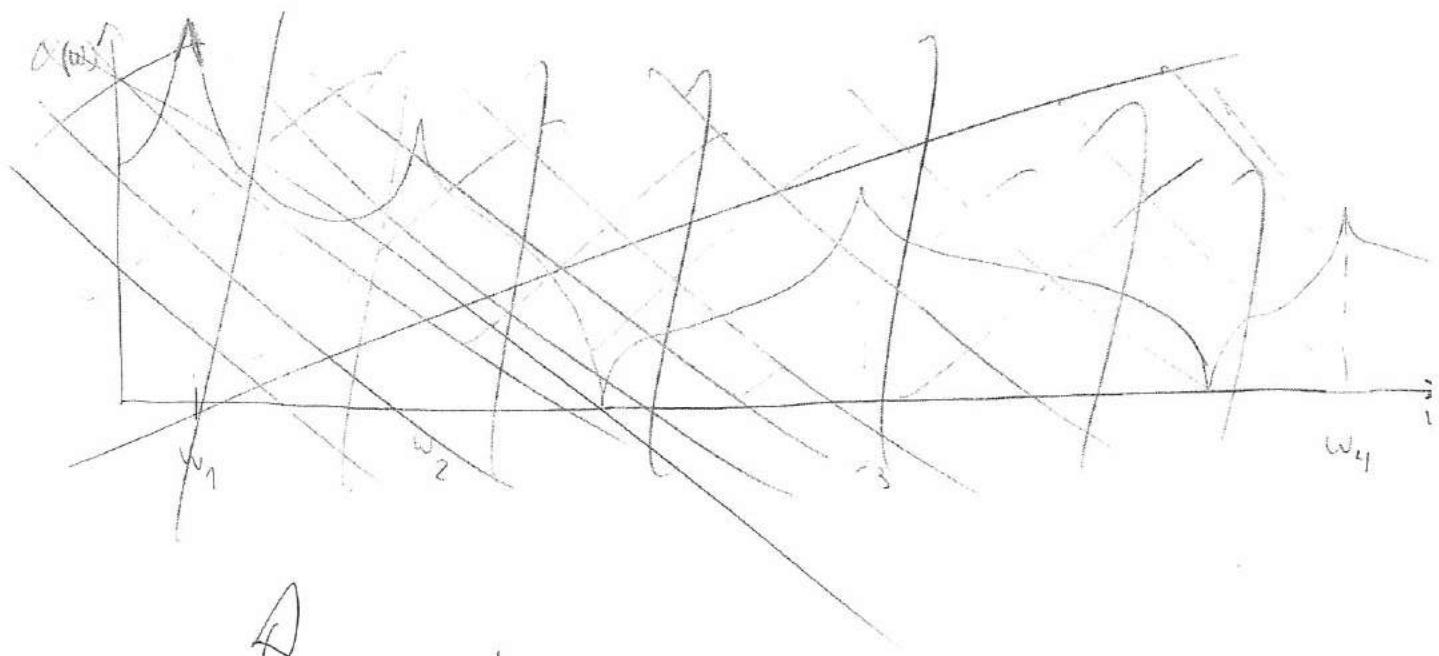
$$\int_0^l \frac{d^2 V_r(x)}{dx^2} E I(x) \frac{d^2 V_s(x)}{dx^2} dx = \delta_{rs} \qquad r, s = 1, \ldots, \infty$$

$$\text{com } \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & , r = s \\ 0 & , r \neq s \end{cases}$$

c) A resposta forçada pode ser expressa em termos de deslocamento, momento fletor, esforço transverso e nas várias funções de resposta em frequência. A dimensão

da lei modal adoptada teve ser diferente consoante o nosso objectivo. Assim, a resposta em deslocamento é satisfatoriamente aproximada pelos 1os modos de vibração. Mas o momento fletor ... ainda mais o esforço transverso já necessitam de uma dimensão maior ... escolha dos ... deve situar-se numa banda de frequências próximas das frequências de excitação.

d)

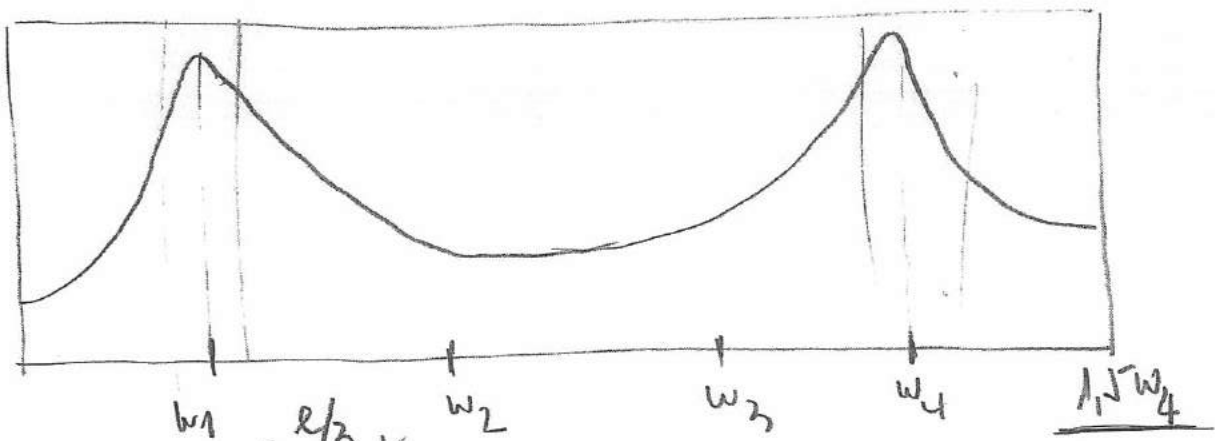


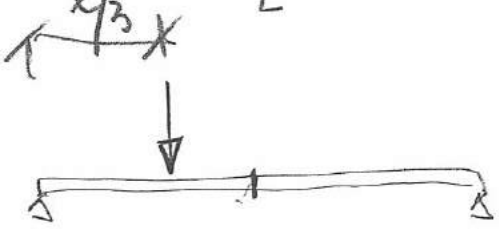
E Rondo

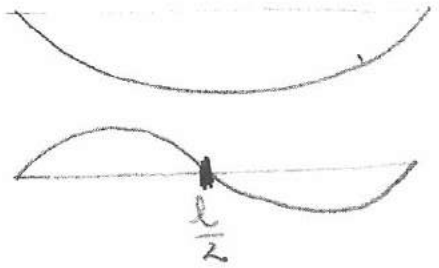
Ver Correcção do Prof.

1.d)

α $\frac{l}{2}, \frac{l}{3}$

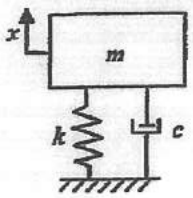






X

1 Exame Especial de Vibrações FEUP - DEMEGI 23 de Dezembro de 2005
Duração 30 minutos SEM CONSULTA
45



1. A equação que descreve o movimento do sistema representado na figura é: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$.

a) Estabeleça a equação característica e obtenha as suas raízes em função de m, c e k.

b) Que valor deve ter c para que, após uma perturbação inicial, a massa tenda para a posição de equilíbrio o mais rapidamente possível? Para esse valor de c, para um deslocamento inicial $x_0<0$ e uma velocidade inicial $\dot{x}_0=0$, esboce a resposta da massa.

2. Considere novamente o sistema representado na figura anterior, mas com a massa sujeita a uma força vertical, com amplitude $f(t)$.

a) Indique dois métodos alternativos para calcular o deslocamento $x(t)$, quando o sistema é sujeito a uma excitação não periódica. Integral de Duhamel e integração numérica

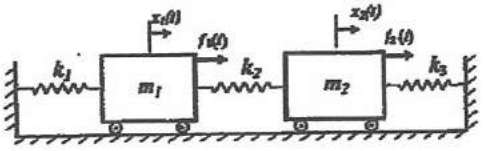
b) Suponha que a excitação $f(t)$ se deve a uma massa descentrada num motor rotativo e que a força transmitida à base quando o sistema vibra em regime estacionário tem amplitude elevada. Após o período de arranque do motor, a velocidade de rotação é constante.

Como alteraria a rigidez da mola de modo a diminuir a amplitude da força transmitida em funcionamento? A alteração proposta evitaria sempre a transmissão de forças com grandes amplitudes (justifique sucintamente)?

c) Considerando apenas a resposta permanente do sistema não amortecido, deduza expressões para a amplitude e a fase da força transmitida ao suporte do sistema quando a excitação é harmónica.

3.

a) Demonstre que os modos naturais de sistemas discretos com n graus de liberdade são, em geral, ortogonais em relação às matrizes de massa e de rigidez.



b) Suponha que as forças aplicadas ao sistema representado na figura são $f_1(t)=F_1\cos(\omega t)$ e $f_2=0$ e que ω varia. Quais as amplitudes máximas do movimento das massas do sistema (sistema idealizado) e a que frequências occorrem? Qual é a amplitude mínima, em módulo, de vibração da massa 1?

4. Deduza a equação do movimento que representa as vibrações longitudinais $u(x,t)$ de uma barra de secção recta com área $A(x)$, com módulo de elasticidade longitudinal E, massa volúmica ρ e sujeita a uma força por unidade de comprimento $f(x,t)$, segundo x.

Exame Especial de Vibrações - 23/12/2005

Parte Teórica

3. a) Sabe-se que: $[k]\{\phi\} = \omega^2 [m]\{\phi\}$

Considerando 2 soluções distintas $\{\phi\}_r$; $\{\phi\}_s$

$$[k]\{\phi\}_r = \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r$$

$$[k]\{\phi\}_s = \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s$$

Premultiplicando por $\{\phi\}_s^T$ a 1ª e por $\{\phi\}_r^T$ a 2ª:

$$\{\phi\}_s^T [k]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r \quad (1)$$

$$\{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$

Aplicando a transposta à 2ª (por ex.):

$$\{\phi\}_s^T [k]\{\phi\}_r = \omega_s^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r \quad (2)$$

pois $[k]$ e $[m]$ são simétricas

Subtraindo (1) e (2):

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_r^2)\{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r$$

Como $\omega_s \neq \omega_r \Rightarrow \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = \delta_{rs}$, $r,s = 1,\ldots$

$$\text{com } \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{para } r = s \\ 0 & \text{para } r \neq s \end{cases}$$

Este resultado implica que (1) fique:

$$\{\phi\}_s^T [k]\{\phi\}_r = \omega_s^2 \delta_{rs} \quad \text{também}$$

(14)

b)

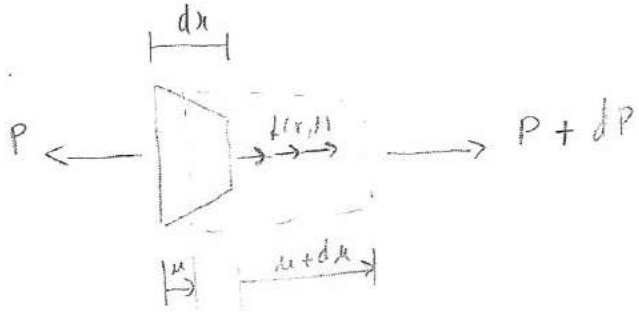
$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(\omega) \\ u_2(\omega) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} +K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & +K_2+K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} +K_1+K_2-\omega^2 m_1 & -K_2 \\ -K_2 & +K_2+K_3-\cdots \end{vmatrix} = 0$$

As amplitudes máximas ocorrem para as 2 frequências naturais que se calculam através do determinante característico e são infinitas pois não há amortecimento.

A amplitude mínima da massa um é zero e ocorre para um valor particular da frequência de excitação entre a frequência fundamental e a segunda frequência natural ($\omega_1 < \omega < \omega_2$)

4.



$$F = \dot{Q}$$

$$-P + P + dP + f(x,t)\,dx = \ell\, A(x)\,dx\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Como:

$$P = E A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad dP = \frac{\partial}{\partial x}\left(E A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) dx$$

Logo, substituindo em (1) e dividindo por dx:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(E A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) = \ell A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}} \qquad \text{c.q.d.}$$

1) (2 val) A vibração mecânica pode definir-se como um movimento alternado em torno de uma posição de referência.

a) (25%) Indicar quais os elementos constituintes de um sistema vibratório;
b) (25%) Explicar, do ponto de vista energético, o fenómeno da vibração;
c) (25%) Definir frequência natural de vibração;
d) (25%) Definir frequência de ressonância de amplitude.

2) (2 val) O isolamento de vibrações consiste em reduzir a grandeza de forças transmitidas por equipamentos para as suas fundações ou em reduzir o movimento de apoios móveis para os equipamentos.

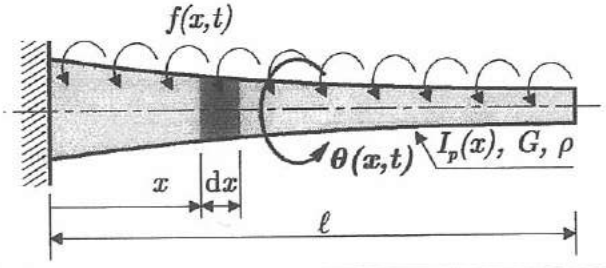
a) (25%) Definir transmissibilidade absoluta e relativa. Representar graficamente e lado a lado a TR_{abs} e a TR_{rel}, indicando eventuais pontos notáveis.
b) (25%) Discutir a eficiência do isolamento em termos da massa do equipamento e da rigidez da suspensão;
c) (25%) Justificar a razão pela qual, em geral, não se considera o amortecimento no dimensionamento de uma suspensão elástica para isolamento de vibrações;
d) (25%) Para uma excitação multi frequência, indicar, justificando, qual a frequência a considerar no dimensionamento da suspensão elástica.

3) (2 val) O comportamento vibratório de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}$ e $\{\dot{x}(t=0)\}$.

a) (25%) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez;
b) (25%) Caracterizar as equações de movimento na base modal ou natural;
c) (25%) Mostrar como a resposta $\{x(t)\}$ do sistema é dada pela combinação linear (sobreposição) dos modos naturais de vibração;
d) (25%) Com base nas frequências naturais ω_1 e ω_2 e nos amortecimentos modais ξ_1 e ξ_2 de um sistema com 2 graus de liberdade, estabelecer duas equações que permitam determinar os parâmetros α e β de uma matriz de amortecimento proporcional, $[c]=\alpha[m]+\beta[k]$. Referir o interesse de uma matriz de amortecimento proporcional.

4) (2 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção descrita pelo campo de deslocamento angular $\theta(x,t)$ que se pode exprimir na forma $\theta(x,t)=\Theta(x)g(t)$.

a) (40%) Considerar um elemento infinitesimal de veio e, por aplicação da 2ª lei de Newton, estabelecer a equação de equilíbrio dinâmico;
b) (30%) Explicar o significado físico da solução $\theta(x,t)$ expressa na forma $\theta(x,t)=\Theta(x)g(t)$;
c) (30%) Escrever as expressões que traduzem as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das funções características $\Theta_r(x)$ $r=1,\ldots,\infty$ representativas das formas naturais de vibração.



Exame - 1ª chamada - 2008-06-11

3. a) A matriz de massa é simétrica e é sempre positiva.
A matriz de rigidez é simétrica e normalmente é definida positiva mas no caso de sistemas semi-definidos é designada por matriz semi-definida positiva

b) São apoios desacoplados em termos de massa e de rigidez mas que já estão acoplados em termos de amortecimento se a matriz [c] obedecer à condição de Caughey (ou, de forma mais redutora) à condição de amortecimento proporcional. Este desacoplamento torna a obtenção da solução, em termos de coordenadas modais, mais simples porque já pode resolver cada equação diferencial como se resolve uma eq diferencial de movimento de um sistema com 1 grau de liberdade.

c) Para mostrar isto basta lembrar que os modos próprios de vibração são linearmente independentes e que portanto formam uma base da qual qualquer vector no espaço de dimensão n pode ser definido (coordenada $x(t)$).
A independência linear fica garantida se todos os vectores forem ortogonais entre si (pela Álgebra). Então basta demonstrar a ortogonalidade dos vectores modais:

Como se sabe: $[K]\{\phi\} = \omega^2 [M]\{\phi\}$.

considerando 2 soluções distintas $\{\phi\}_i$ e $\{\phi\}_j$

$$[K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s \qquad (1)$$

$$[K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r \qquad (2)$$

Pre-multiplicando (1) por $\{\phi\}_r^T$ e (2) por $\{\phi\}_s^T$

$$\{\phi\}_r^T [K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s \qquad (3)$$

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r \qquad (4)$$

Aplicando a Transposta a (4) (por ex.):

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s \qquad (5)$$

pois $[K]$ e $[m]$ são simétricas

Subtraindo (3) e (5)

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_r^2)\{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s \quad , \; r, s = 1, \ldots, n$$

Como $\omega_s^2 \neq \omega_r^2$ para $r \neq s$ e

$$\{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s = 0 \quad , \quad r \neq s$$

Logo, através de (3):

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = 0 \quad , \quad r \neq s \qquad \text{c.q.d.}$$

d)

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \alpha [\Phi]^T [m] [\Phi] + \beta [\Phi]^T [K] [\Phi] =$$

$$= \alpha [I] + \beta [\omega^2] = [2\xi\omega]$$

Estão a projeção do sistema de eq. diferenciais do enunciado na base modal:

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [2\xi\omega]\{\dot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \Rightarrow$$

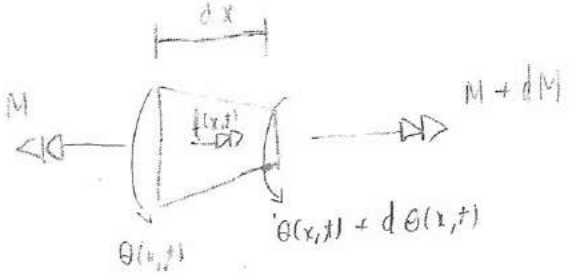
$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 2\xi_1\omega_1\dot{\eta}_1(t) + \omega_1^2\eta_1(t) = N_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 2\xi_2\omega_2\eta_2(t) + \omega_2^2\eta_1(t) = N_2(t) \end{cases}$$

Sendo:

$$2\xi_1\omega_1 = \alpha + \beta\omega_1^2$$

$$2\xi_2\omega_2 = \alpha + \beta\omega_2^2$$

4. a)



Pela 2ª Lei de Newton $\Sigma M = \Sigma H$

$$-M + M + dM + f(x,t)\,dx = \rho I_p(x)\,dx\,\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

Pela Lei dos Solidos:

$$M = G I_p \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} \Rightarrow dM = \frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right) dx$$

Substituindo em (1) e dividindo por dx:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) = \rho I_p(x) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2}$$

C.q.d.

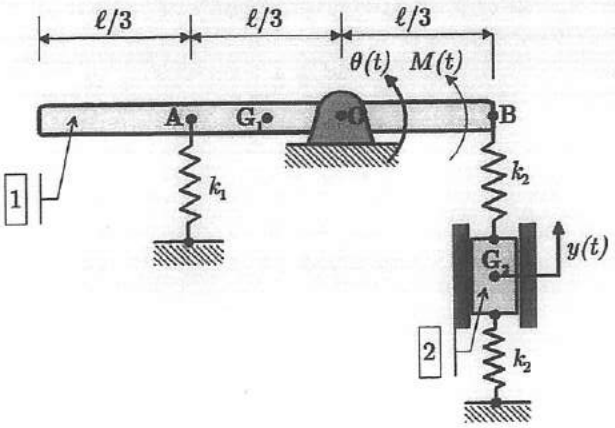
b) Ao se conseguir separar a resposta em 2 influências distintas que nos dão a forma natural de vibração ($\Theta(x)$) e a evolução desta forma ao longo do tempo ($g(t)$) a obtenção da solução para o a equação diferencial de equilíbrio dinâmico é muito facilitada pois hode-se usar o método de integração de variáveis separáveis.

c)

$$\int_0^l \Theta_s(x)\, \rho I_p\, \Theta_n(x)\, dx = \delta_{ns} \quad , n,s = 1, \dots, \infty$$

$$\int_0^l \frac{d\Theta_s(x)}{dx} G I_p \frac{d\Theta_n(x)}{dx} dx = \delta_{ns} \quad , n,s = 1, \dots, \infty$$

Com $\delta_{ns} = \begin{cases} 1 & \text{para } n = s \\ 0 & \text{para } n \neq s \end{cases}$



2) (4 val.) O mecanismo representa-do na figura é constituído por dois corpos. O corpo 1 é uma barra de comprimento ℓ, que roda em torno do ponto fixo **O**, sob a acção do momento motor $M(t)$; os pontos **A** e **B** da barra estão ligados a molas lineares. O corpo 2 é uma massa que se encontra ligada a uma mola em cada extremidade. Na situação de equilíbrio estático, $\theta = 0$ e $y = 0$. A dissipação de energia no sistema é desprezável.

a) (30%) Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 & -1200 \\ -1200 & 12000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

b) (15%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

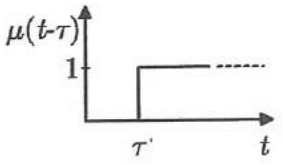
c) (15%) Escrever as equações de movimento na base modal.

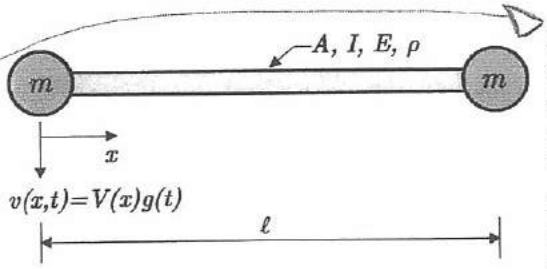
d) (20%) Calcular a expressão da amplitude $\Theta(\omega)$ de rotação da barra em função da frequência de excitação, quando $M(t) = M_0 \cos(\omega t)$ e considerando apenas o regime estacionário. Esboçar graficamente a variação da amplitude de $y(t)$ em função da frequência, assinalando eventuais pontos notáveis.

e) (20%) Determinar o limite superior da resposta $\theta(t)$ à solicitação do tipo,

$$\begin{cases} M(t) = M_0 \cos(\omega t), & t \le \tau \\ M(t) = M_0 \cos(\omega t) + \mu(t-\tau) M_1, & t > \tau \end{cases}$$

onde M_0 e M_1 são constantes e $\mu(t-\tau)$ é a função degrau unitário aplicado no instante $t = \tau$.





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I possui em cada uma das suas extremidades uma massa concentrada m. O material da viga apresenta módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. A viga encontra-se livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação e/ou rotação) com energia elástica nula e frequência nula.

a) (20%) Escrever e classificar as condições de fronteira da viga.

b) (20%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \frac{2}{\pi} - \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\varepsilon = \frac{m}{\rho A \ell}$. Esboçar graficamente a variação da frequência em função de ε.

d) (30%) Indicar o valor exacto da frequência natural quando $m \to 0$. Comparar com o resultado aproximado obtido na alínea anterior e comentar.

Parte Prática

2.

a) En. Cinética

$$J_0 = J_G + m\,\overline{OG_1}^2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{1}{36} m_1 l^2 =$$

$$= \frac{1}{9} m_1 l^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} m_1 l^2\right)\left(\dot{\theta}(t)\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{y}(t)\right)^2$$

En. potencial

$$V = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{l}{3}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{l}{3}\sin\theta - y\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2 =$$

$$= \frac{k_1}{2}\left(\frac{l}{3}\theta\right)^2 + \frac{k_2}{2}\left(\frac{l}{3}\theta - y\right)^2 + \frac{k_2}{2} y^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = M \frac{\partial}{\partial \theta}(\theta) = M_t$$

$$Q_2 = M \frac{\partial}{\partial y}(\theta) = 0$$

Considerando as eq. de Lagrange:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{9} m_1 l^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{9} m_1 l^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = K_1 \frac{l^2}{9}\theta + K_2\left(\frac{l}{3}\theta - y\right)\frac{l}{3}$$

—"—

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_2 \dot{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m_2 \ddot{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -K_2\left(\frac{l}{3}\theta - y\right) + K_2 y$$

$$\begin{cases} m_1 \frac{l^2}{9}\ddot{\theta}(t) + K_1 \frac{l^2}{9}\theta(t) + K_2 \frac{l}{3}\left(\frac{l}{3}\theta - y\right) = M(t) \\ m_2 \ddot{y}(t) - K_2\left(\frac{l}{3}\theta - y\right) + K_2 y = 0 \end{cases}$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 \frac{l^2}{9} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1+K_2)\frac{l^2}{9} & -K_2\frac{l}{3} \\ -K_2\frac{l}{3} & 2K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Fazendo $\{u(t)\} = \{u\}\cos(\omega t - \phi)$

$$\begin{vmatrix} 400 - 0{,}2\omega^2 & -1200 \\ -1200 & 12000 - 10\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 \cong 25{,}728 \text{ rad/s}$$

e $\omega_2 \cong 50{,}379$ rad/s

1º Forma natural

$25{,}728$

$(400 - 0{,}2 \times \omega_1^2) \cdot \theta(\omega) - 1200\, y(\omega) = 0 \Rightarrow \theta(\omega) \cong 4{,}484\, y(\omega)$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 4{,}484 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2º Forma natural:

$(400 - 9{,}2\,\omega_2^2)\,\theta(\omega) - 1200\, y(\omega) = 0 \Rightarrow \theta(\omega) \cong -11{,}152\, y(\omega)$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -11{,}152 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) $$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u\}_1}} \{u\}_1 \cong 0{,}267 \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}1975 \\ 0{,}2671 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 \cong 0{,}1693 \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -1{,}8884 \\ 0{,}1693 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25{,}728^2 & 0 \\ 0 & 50{,}379^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1975 & -1{,}8884 \\ 0{,}2671 & 0{,}1693 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25{,}728^2 & 0 \\ 0 & 50{,}379^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}1975\, M(t) \\ -1{,}8884\, M(t) \end{Bmatrix}$$

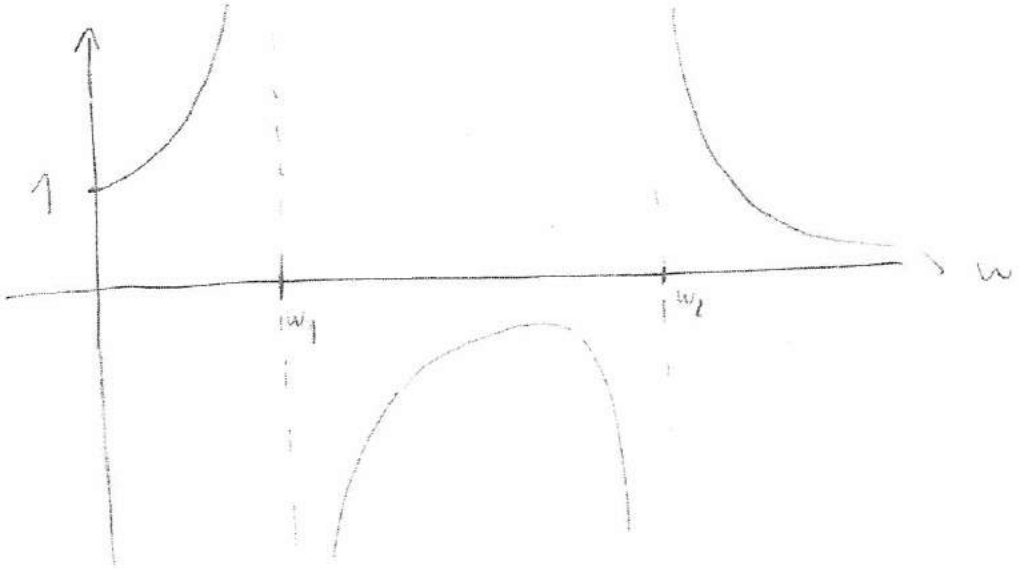
d)

$$\begin{bmatrix} 400 - 0{,}2\omega^2 & -1200 \\ -1200 & 120000 - 10\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ Y(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pelas expressões 9.19.

$$\Theta(\omega) = \frac{(120000 - 10\omega^2) M_0 - 0}{(400 - 0{,}2\omega^2)(120000 - 10\omega^2) - 1200^2}$$

$$Y(\omega) = \frac{0 - (-1200) M}{(400 - 0{,}2\omega^2)(120000 - 10\omega^2) - 1200^2}$$



e) Através de c):

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25{,}728^2 \eta_1(t) = 1{,}1975\ M_0 \cos(\omega t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 50{,}379^2 \eta_2(t) = -1{,}8884\ M_0 \cos(\omega t) \end{cases} \quad t \leq 6$$

Para este instante:

$$\eta_1(t) = \frac{\frac{1,1975\,M_0}{25,728^2}}{|1-\beta_1^2|}\cos(\omega t - \phi_1)$$

$\phi \begin{cases} \pi & \text{se } \beta_1 > 1 \\ 0 & \text{se } \beta_1 < 1 \end{cases}$

$$\eta_2(t) = \frac{\frac{-1,8884\,M_0}{50,379^2}}{|1-\beta_2^2|}\cos(\omega t - \phi_2)$$

$\phi \begin{cases} \pi & \text{se } \beta_2 > 1 \\ 0 & \text{se } \beta_1 < 1 \end{cases}$

Para $t > \tau$:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25,728^2\,\eta_1(t) = 1,1975\,M_0\cos(\omega t) + 1,1975\,M_1\,\mu(t-\tau) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 50,379^2\,\eta_2(t) = -1,8884\,M_0\cos(\omega t) - 1,8884\,M_1\,\mu(t-\tau) \end{cases}$$

Se ignorarmos o efeito das forças, já sabemos qual a contribuição da parte harmónica. Resta calcular a resposta máxima ao degrau:

$$\eta_{1\,max}(\omega) = \frac{2\times(1,1975\,M_1)}{25,728^2} \cong 0,003618\,M_1$$

$$\eta_{2\,max}(\omega) = \frac{2\times(-1,8884\,M_1)}{50,379^2} \cong -0,001488\,M_1$$

Então, considerando as 2 solicitações:

$$\eta_{1\,max} = \frac{0,001809\,M_0}{|1-\beta^2|} + 0,003618\,M_1$$

$$\eta_{2\,max} = -\frac{0,000744\,M_0}{|1-\beta^2|} - 0,001488\,M_1$$

$$\theta(t)_{max} \leq \underset{=1,1975}{\phi_{11}}\ \eta_{1\,max} + \underset{=-1,8884}{\phi_{12}}\ \eta_{2\,max} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftarrow) \quad \boxed{\theta(t)_{max} \leq \frac{0,003571\, M_0 + 0,00714\, M_1}{|1-\beta^2|}}$$

É menor porque η_1 e η_2 não estão em fase

3. a) $v(x,t) = V(x)\, g(t)$

$x = 0$:

$$EI \frac{\partial^2 V(0)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V(0)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right)\Big|_{x=0} = m\, \ddot{v}(x,t)\Big|_{x=0} = -\omega^2 m\, V(0) \Leftrightarrow \frac{\partial^3 V(0)}{\partial x^3} = -\frac{\omega^2 m\, V(0)}{EI}$$

$x = l$:

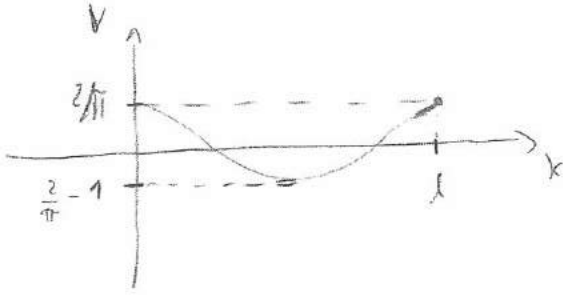
$$EI \frac{\partial^2 V(l)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V(l)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right)\Big|_{x=l} = m\, \ddot{v}(x,t)\Big|_{x=l} \Leftrightarrow \frac{\partial^3 V(l)}{\partial x^3} = -\frac{\omega^2 m\, V(l)}{EI}$$

Todas estas cond. fronteira são naturais:

b) Basta a função ser derivável até às vezes da ordem do problema (problema de ordem 4), e verificar as condições fronteira geométricas (que neste caso não existem):

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{\pi}{l}\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) \rightarrow \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{\pi^2}{l^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$



c)

Em. pot.:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{EI\pi^4}{2l^4}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2\pi}\cdot l\,\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right]_0^l =$$

$$= \frac{EI\pi^4}{2l^4}\left[\frac{l}{2} - 0 - 0\right] = \frac{EI}{2}\cdot\frac{\pi^4}{2l^3}$$

Em. cinética:

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\left(V(x)\right)^2 dx + T^*_{clm}\right) =$$

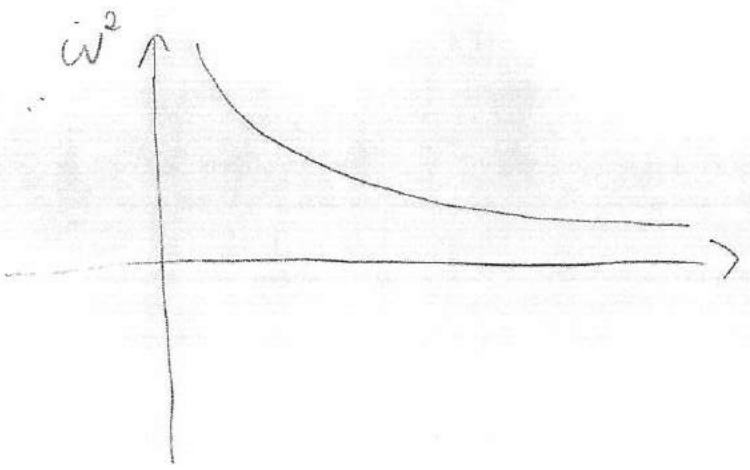
$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\left\{\frac{-\left[l\left(\pi\,\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) - 8\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) - (\pi^2+8)x\right]}{2\pi^2}\right\}_0^l + \frac{1}{2}m\left(V(l)\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}m\left(V(l)\right)^2\right) = \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\right) + \frac{m}{2}\frac{8}{\pi^2}\right)$$

Então:

$$R\left(V(x)\right) = \omega^2 = \frac{\frac{EI}{2}\cdot\frac{\pi^4}{2l^3}}{\frac{\rho A}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\right) + \frac{m}{2}\frac{8}{\pi^2}} =$$

$$= \frac{\frac{EI}{\rho A l}\left(\frac{\pi^4}{2l^3}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} + \varepsilon\cdot\frac{8}{\pi^2}}$$



d) Pág. 359

livre - livre $\rightarrow$ $\boxed{\beta_3 l = 4{,}7300}$ na tabela diz β_2 mas na realidade ν está é o 3º Modo de vibração (o 1º e o 2º são translação e rotação de corpo rígido)

$$\omega_3 = (4{,}7300)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = \boxed{22{,}3729 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}}$$

$$\left.\frac{d^2 v(x,t)}{dx^2}\right|_{x=0} = \omega^2 = \frac{EI}{\rho A l^4} \frac{\frac{\pi^4}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^{GR} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \simeq \boxed{22{,}6764 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}}$$

Comparação

$$\text{Erro} = \frac{|\omega^{GR} - \omega_3|}{\omega_3} \times 100 \simeq 1{,}37\%$$

1) (2 val) Um sistema vibratório com um grau de liberdade e amortecido é sujeito a diferentes solicitações.
Caracterizar sucintamente e esboçar graficamente (indicando eventuais pontos notáveis) a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

a) (30%) solicitação impulsiva aplicada no instante $t=\tau$, $f(t)=F^*\delta(t-\tau)$;

b) (30%) solicitação em "degrau" aplicada no instante $t=\tau$, $f(t)=F_0\mu(t-\tau)$.

O sistema é sujeito a uma solicitação periódica $f(t)=f(t+T)$ cuja frequência fundamental $\omega=2\pi/T$ é menor do que a frequência de ressonância do sistema. No entanto, o sistema responde com um nível de vibração elevado.

c) (40%) Diagnosticar a causa de tal comportamento.

2) (2 val) Considerar um sistema vibratório com um grau de liberdade em regime forçado.

a) (25%) Definir factor de amplificação dinâmica. Representar graficamente o factor de amplificação dinâmica em função da frequência, indicando claramente eventuais pontos notáveis.

b) (25%) Designando a resposta a um impulso unitário $\delta(t)$ por $h(t)$, estabelecer, justificando, uma expressão genérica para a determinação da resposta a uma excitação arbitrária;

c) (25%) Definir espectro de resposta transiente e indicar a sua principal utilidade.

d) (25%) Um sistema não amortecido em regime forçado harmónico, quando excitado a uma frequência idêntica à sua frequência natural, responde com uma amplitude que aumenta indefinidamente (sem limite). Com base na análise de forças actuantes sobre o sistema, explicar este comportamento.

3) (2 val) O comportamento vibratório de um sistema com n graus de liberdade pode ser descrito pelo modelo espacial $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$.

a) (25%) Definir modos naturais de vibração;

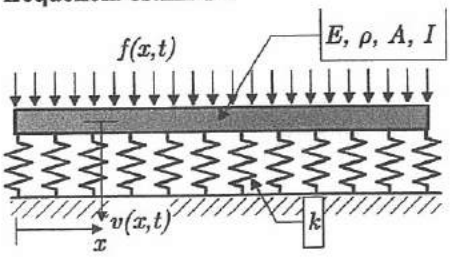
b) (25%) Indicar e escrever uma propriedade relevante dos vectores modais representativos das formas naturais de vibração.

c) (25%) Referir qual o interesse da representação do sistema de equações de movimento na base modal.

d) (25%) Porque é que a matriz de massa é sempre definida positiva? A matriz de rigidez é sempre definida positiva? Justificar.

4) (2 val) O comportamento vibratório em regime livre ou natural de um sistema contínuo é governado por uma equação diferencial de derivadas parciais cuja solução pode ser determinada pelo método da separação de variáveis.

a) (40%) O método da energia de Rayleigh é um método aproximado para estimar a frequência fundamental. Indicar em que princípio(s) se baseia, caracterizar a função de aproximação utilizada e a frequência estimada.



b) (60%) A figura representa uma viga suportada por uma suspensão elástica de rigidez distribuída. Isolar um elemento infinitesimal e estabelecer a(s) equação(ões) de equilíbrio dinâmico usando a teoria das vigas finas de Euler-Bernoulli.

Exame de Recurso - 2008-07-11

Parte Teórica

3. a) Os modos naturais de vibração são constituídos pelas frequências e formas naturais. Assim, representam as soluções possíveis para o problema característico, sendo cada modo natural um movimento harmónico síncrono.

Da sua combinação linear resulta a resposta do sistema não amortecido em regime livre ou natural.

b) Ortogonalidade relativamente à matriz [ ] e à matriz [ ].

$$\{\phi\}_s^T [m] \{\phi\}_r = 0 \quad \text{para } r \neq s \text{ com } r, s = 1, \dots, n$$

$$\{\phi\}_s^T [k] \{\phi\}_r = 0 \quad \text{para } r \neq s \text{ com } r, s = 1, \dots, n$$

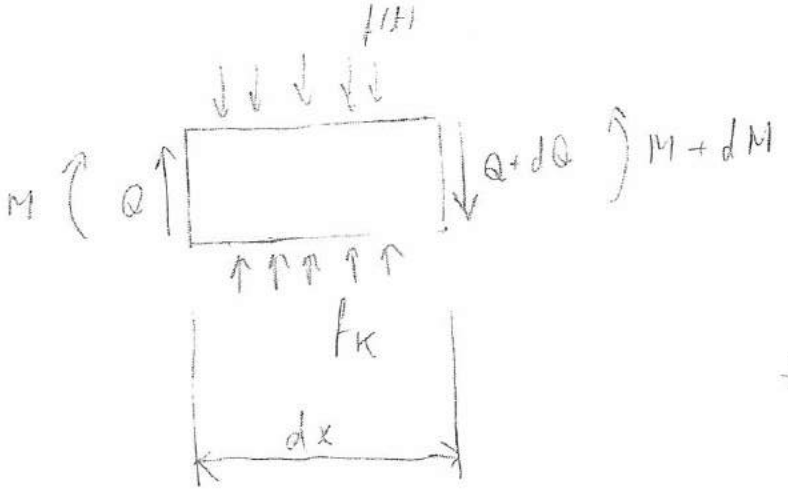
c) Permite o desacoplamento de inércia e de rigidez e nos casos em que a matriz de amortecimento obedece à condição de Caughey (ou de proporcionalidade) também permite o desacoplamento do amortecimento e com isto conduz a total independência das n equações algébricas de movimento.

d) A matriz de massa é sempre definida positiva porque todos os graus de liberdade estão associados a uma massa e como se sabe não existem massas nulas (nem negativas).

O mesmo já não é absolutamente verdade para a matriz de rigidez porque esta já pode ter valores próprios nulos no caso de sistemas semi definidos positivos (com condições fronteira insuficientes para evitar movimentos de corpo rígido).

4. a) O método do quociente de Rayleigh baseia-se no princípio da conservação da energia mecânica e do total convertido a energia cinética em energia potencial. Em sistemas contínuos faz uso de uma função de aproximação que tem de verificar as condições fronteira geométricas do problema e que seja derivável em ordem ao tempo. Quanto mais próxima for a função de aproximação mais próxima será a frequência natural encontrada da frequência natural exata.

b)



→ Euler - Bernoulli

$$\begin{cases} \sum M = K_0 \\ \sum F_y = \bar{a} \end{cases} \begin{cases} -M + M + dM - (Q + dQ)\cdot dx - f(t)\cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + K v \, dx \cdot \frac{dx}{2} = 0 \\ -Q - f(t)\,dx + (K\, v(x,t))\,dx - (Q + dQ) = \rho A\, dx \, \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -Q\,dx + dM = 0 \\ -dQ - f(t)\,dx + K\, v(x,t)\,dx = \rho A\, dx \, \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

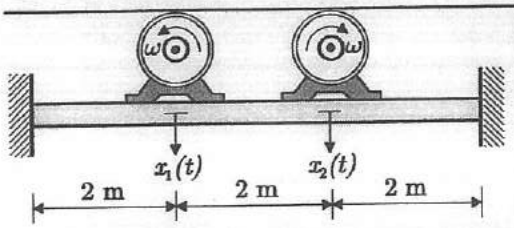
Como $dM = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}\,dx$ y $dQ(x,t) = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\,dx$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -Q\,dx + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}\,dx = 0 \\ -\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\,dx - f(t)\,dx + K\, v(x,t)\,dx = \rho A\, dx \, \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - f(t) + K\, v(x,t) = \rho A \, \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

Como $M(x,t) = EI \, \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \, \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \, \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = K\, v(x,t) - f(t)}$$



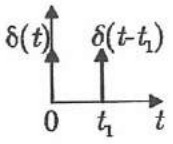
2) (4 val.) Uma máquina de 350 kg é montada a 2 m do apoio esquerdo de uma viga bi-encastrada com 6 m de comprimento, enquanto que uma máquina de 450 kg é colocada a 2 m do apoio direito. Em funcionamento, as máquinas exercem na viga forças $f_1(t)$ e $f_2(t)$, segundo $x_1(t)$ e $x_2(t)$ respectivamente.

a) (20%) Estabelecer a matriz dos coeficientes de flexibilidade.
b) (10%) Calcular a matriz de rigidez.
c) (10%) Escrever as equações do movimento.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

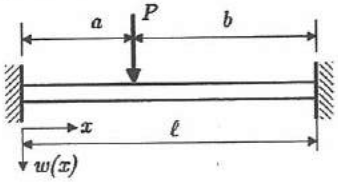
$$\begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1128\times10^7 & -0.77550\times10^6 \\ -0.77550\times10^6 & 0.1128\times10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

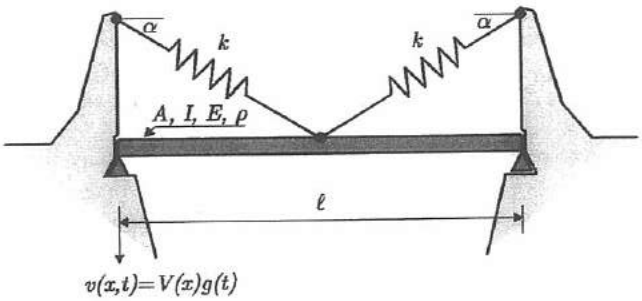
d) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.
e) (10%) Escrever as equações do movimento na base modal.
f) (30%) Considerar que o sistema, em repouso, é submetido a duas forças impulsivas $f_1(t) = F_1\delta(t)$ e $f_2(t) = F_2\delta(t-t_1)$, sendo a primeira aplicada segundo $x_1(t)$ no instante $t = 0$ e a segunda segundo $x_2(t)$ no instante t_1 ($t_1 > 0$). Determinar o deslocamento $x_1(t)$ para $t > t_1$.



NOTA: A deflexão $w(x)$ da viga devida a uma carga estática P é dada pela expressão:

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2\right] & 0 \le x \le a \\ \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2 + \dfrac{\ell^3}{b^2}(x-a)^3\right] & a \le x \le \ell \end{cases}$$





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, de material com módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, está simplesmente apoiada e é suportada a meio vão por duas molas lineares elásticas de rigidez k conforme se representa na figura. As funções $V(x) = \delta \sin\dfrac{2\pi}{\ell}x$ e $V(x) = \delta \sin\dfrac{\pi}{\ell}x$ são funções admissíveis para o sistema podendo ser usadas com o método da energia de Rayleigh.

a) (20%) Esboçar graficamente e seleccionar, justificando, dentre as funções propostas, a mais adequada para estimar a frequência natural fundamental;
b) (10%) Calcular a energia cinética máxima, T_{max};
c) (20%) Calcular a energia elástica máxima, V_{max};
d) (10%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração. Exprimir o resultado em função de $k = \varepsilon EI / \ell^3$.
e) (20%) Discutir a validade da solução obtida na alínea anterior para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.
f) (20%) Determinar a frequência fundamental exacta para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.

Parte Prática

2. a) $$a_{11} = w(x=2)\Big|_{\substack{a=2\\b=4\\P=1}} = \frac{1\times 4^2}{6EI\times 6^3}\left[(2\times 4 - 3\times 6) + 3\times 6(6-4)2^2\right] (=$$

$$(= a_{11} \cong \frac{1}{EI}\cdot 0{,}790$$

$$a_{12} = w(x=2)\Big|_{\substack{a=4\\b=2\\P=1}} \cong \frac{1}{EI}\,0{,}543$$

Não deveria ser calculado!

$$a_{21} = w(x=4)\Big|_{\substack{a=2\\b=4\\P=1}} = \frac{0{,}543}{EI} = a_{12}$$

$$a_{22} = w(x=4)\Big|_{\substack{a=4\\b=2\\P=1}} = \frac{1}{EI}\cdot 0{,}790$$

$$[a] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0{,}790 & 0{,}543 \\ 0{,}543 & 0{,}790 \end{bmatrix} \quad [m/N]$$

b) $$[K] = [a]^{-1} = EI\begin{bmatrix} 2{,}399 & -1{,}649 \\ -1{,}649 & 2{,}399 \end{bmatrix} \quad [N/m]$$

c) Pode-se construir diretamente o sistema de equações em notação matricial pois: $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$. Mas confirma-se isto aplicando o formalismo de Lagrange:

$$T = \frac{1}{2} \overset{350}{m_1} \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \overset{450}{m_2} \cdot \dot{x}_2^2$$

Em potencial:

$$V = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2,399\,EI & -1,649\,EI \\ -1,649\,EI & 2,399\,EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \times 2,399\,EI\,x_1^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \times 3,298\,EI\,x_1 x_2 + \frac{1}{2} \times 2,399\,EI\,x_2^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) + f_2 \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2) = f_1$$

$$Q_2 = f_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 350\,\dot{x}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 350\,\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = 2,399\,EI\,x_1 - 1,649\,EI\,x_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = 450\,\dot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = 450\,\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = -1,649\,EI\,x_1 + 2,399\,EI\,x_2$$

$$\therefore \begin{cases} 350\,\ddot{x}_1 + 2,399\,EI\,x_1 - 1,649\,EI\,x_2 = f_1(t) \\ 450\,\ddot{x}_2 - 1,649\,EI\,x_1 + 2,399\,EI\,x_2 = f_2(t) \end{cases}$$

Reparar que em casos não se faz isto! Como já temos a matriz de rigidez basta construir a matriz de massa e colocar em equação o problema:

$$[m] = \begin{bmatrix} 350 & 0 \\ 0 & 450 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 350 & 0 \\ 0 & 450 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 2,399 & -1,649 \\ -1,649 & 2,399 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \begin{cases} 350\,\ddot{x}_1(t) + 2,399\,EI\,x_1(t) - 1,649\,EI\,x_2(t) = f_1(t) \\ 450\,\ddot{x}_2(t) - 1,649\,EI\,x_1 + 2,399\,EI\,x_2(t) = f_2(t) \end{cases}$$

d) $\{x(t)\} = \{u\}\cos(\omega t - \phi)$

reg linear

$$\begin{bmatrix} 0,1128 \times 10^7 - 500\,\omega^2 & -0,77550 \times 10^6 \\ -0,77550 \times 10^6 & 0,1128 \times 10^7 - 375\,\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0,1128\times10^{7} - 500\,\omega^{2} & -0,77550\times10^{6} \\ -0,77550\times10^{6} & 0,1128\times10^{7} - 375\,\omega^{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (=)$$

$(=)\quad \omega_1 \cong 28,320 \text{ rad/s} \quad V \quad \omega_2 = 66,798 \text{ rad/s}$

1ª Forma natural:

$$\left(0,1128\times10^{7} - 500\times\omega_1^{2}\right) u_1 - 0,77550\times10^{6}\, u_2 = 0 \quad (=)$$

$$(=)\quad u_1 = 1,0667\, u_2$$

$$L_D \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1,0667 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma Natural:

$$\left(0,1128\times10^{7} - 500\,\omega_2^{2}\right) u_1 - 0,77550\times10^{6}\, u_2 = 0 \quad (=) \quad u_1 = -0,7031\, u_2$$

$$L_D \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0,7031 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

e) Normalização

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^{T}\,[m]\,\{u\}_i}}\,\{u\}_i$$

Assim:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{943,924}} \begin{Bmatrix} 1,0667 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,03472 \\ 0,03255 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{622,175}} \begin{Bmatrix} -0,7031 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,02819 \\ 0,04009 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,03472 & -0,02819 \\ 0,03255 & 0,04009 \end{bmatrix}$$

Seja: $\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \Rightarrow [I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 28,320^2 & 0 \\ 0 & 66,798^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,03472\, f_1(t) + 0,03255\, f_2(t) \\ -0,02819\, f_1(t) + 0,04009\, f_2(t) \end{Bmatrix}$$

1) Pela última coluna:

$0 \le t \le t_1 \rightarrow f_1(t) = F_1\,\delta(t) \quad \wedge \quad f_2(t) = 0$

$$\eta_1(t) = 0,03472 \cdot F_1 \underbrace{\frac{1}{m_1 \omega_1}}_{\omega_1 = 28,320} \sin \omega_1 t = \frac{0,03472\, F_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t$$

$$\eta_2(t) = -0,02819\, F_1 \frac{1}{m_2 \omega_2} \sin \omega_2 t = \frac{-0,02819\, F_1}{\omega_2} \sin \omega_2 t$$

No instante $t = t_1$:

$$\eta_1(t = t_1) = \frac{0,03472}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t_1$$

$$\eta_2(t = t_1) = \frac{-0,02819}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t_1$$

$$\dot{\eta}_1(t = t_1) = 0,03472 \cos \omega_1 t_1$$

$$\dot{\eta}_2(t = t_1) = -0,02819 \cos \omega_2 t_1$$

Então, para $t > t_1$: (expressão 6.10)

$$\eta_1(t) = 1^{\circ}\left(\frac{0,03472}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t_1 \cos \omega_1(t - t_1) + \frac{0,03472}{\omega_1} \cos \omega_1 t_1 \operatorname{sen} \omega_1(t - t_1)\right)$$

$$\eta_2(t) = 1^{\circ}\left(\frac{-0,02819}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t_1 \cos \omega_2(t - t_1) - \frac{0,02819}{\omega_2} \cos \omega_2 t_1 \operatorname{sen} \omega_2(t - t_1)\right)$$

Como:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = [\Phi] \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix}$$

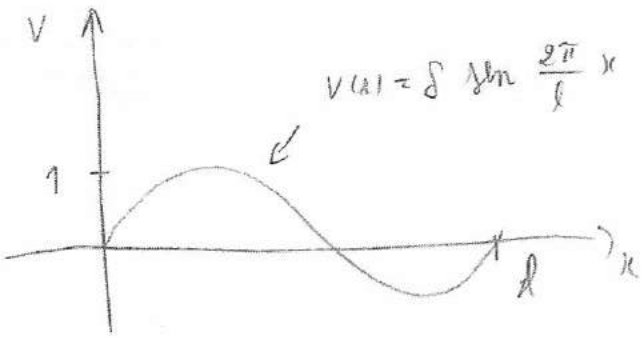
para $t > t_1$:

$$x_1(t) = \frac{0,03472^2}{\omega_1} \cdot \operatorname{sen} \omega_1 t \cdot \cos \omega_1(t - t_1) + \frac{0,03472^2}{\omega_1} \cos \omega_1 t_1 \operatorname{sen} \omega_1(t - t_1) +$$

$$+ \frac{0,02819^2}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t \cos \omega_2(t - t_1) + \frac{0,02819^2}{\omega_2} \cos \omega_2 t_1 \operatorname{sen} \omega_2(t - t_1)$$

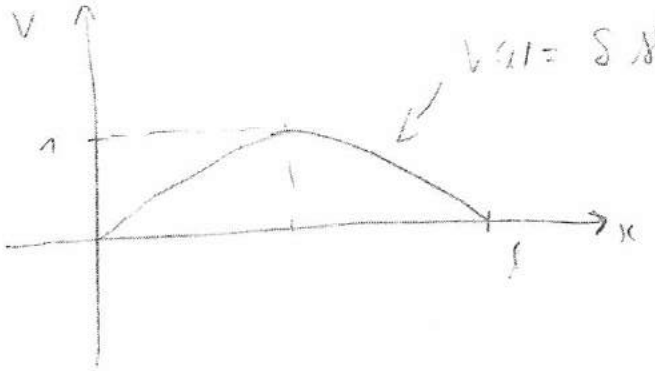
3. a) $V(x) = \delta \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\ell} x$

$\hookrightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\ell}} = \ell$



$V(x) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x$

$\hookrightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{\ell}} = 2\ell$



Como ω é a função $V(x) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x$ é a mais adequada para estimar a frequência fundamental porque como é sabe o modo fundamental (1º modo) não tem nodos e como tal $V(x) \neq 0$, $x \in]0, \ell[$.

b) $T_{max} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A (V(x))^2 dx + \int^* \right) =$

$$= \omega_2 \left(\frac{\rho A}{2} \int_0^l \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{l} x\right) dx \right) = \omega_2 \frac{\rho A \delta^2}{2} \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 =$$

$$= \omega_2 \left(\frac{\rho A}{2} \frac{\delta^2 l}{2} \right)$$

c) $$V_{max} = \frac{1}{2} \left[\int_0^l EI \left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \left[\frac{1}{2} K \operatorname{sen} \alpha \left(V\left(\frac{l}{2}\right) \right)^2 \right] \times 2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(-\delta \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right) \right)^2 dx + \frac{1}{2} 2K \operatorname{sen}\alpha \left(\delta^2 \underbrace{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{l} \frac{l}{2}\right)}_{=1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} EI \left(\frac{48{,}7045\, \delta^2}{l^3} - 0 \right) + \frac{1}{2} (2K\delta^2 \operatorname{sen}\alpha)$$

d) $$R(V(x)) = \omega^2 = \frac{V_{max}}{T^*_{max}} = \frac{\frac{1}{2} EI \left(\frac{48{,}7045\, \delta^2}{l^3} \right) + \frac{1}{2} (2K\delta^2 \operatorname{sen}\alpha)}{\frac{\rho A}{2} \frac{\delta^2 l}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\varepsilon EI}{l^3} \cdot 48{,}7045 + 2K\varepsilon \operatorname{sen}\alpha}{\frac{\varepsilon \rho A l}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\varepsilon EI}{l^3}} \cdot \sqrt{\frac{48{,}7045 + 2K\varepsilon \operatorname{sen}\alpha}{\frac{\varepsilon \rho A l}{2}}} = \sqrt{K} \cdot \sqrt{\frac{\frac{48{,}7045}{\varepsilon} + 2K \operatorname{sen}\alpha}{\frac{\rho A l}{2}}}$$

e) $K \to \infty \Rightarrow \varepsilon \to \infty \Rightarrow V\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ Apoio simples em $l/2$

Como a função utilizada em $V\left(\frac{l}{2}\right) = \delta$ então não se obtém uma solução válida da frequência natural. D

Para $K \to 0 \quad \Rightarrow \varepsilon \to 0$

Trata-se de uma viga apoio simples - apoio simples sem interacções com o exterior.

Como referido no enunciado $V(x)$ utilizado já é uma função admissível para o problema pelo que continua a sê-lo para este caso limite (ao procurar de Rayleigh o termo V_{ef} anula-se).

$K \to 0$:

Viga em regime livre, Cond fronteira: apoio simples - apoio simples

Pág. 358:

$$\beta_1 l = \pi \quad \Rightarrow \quad w_1 = (\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} =$$

$K \to \infty$:

Viga em regime livre, cond. fronteira: apoio simples - apoio simples

Mas em regime livre responderá com o 2º modo de vibração porque está simplesmente apoiada a meio não que é o ponto onde se encontra o nodo do 2º modo de vibração para uma viga simplesmente apoiada:

$\beta_2 l = 2\pi \Rightarrow \omega_{(1)} = (2\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$

freq. fundamental para esta configuração

A título de curiosidade, vou calcular o valor de ω_1^{QR} para $K \to 0$:

$$\omega_1^{QR}\Big|_{K\to 0} = \sqrt{\frac{\frac{EI}{l^3} \cdot 48{,}7045 + 0}{\frac{\rho A l}{2}}} = \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4} \cdot \frac{48{,}7045}{1/2}} \simeq$$

$$\simeq 9{,}8696 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

A exacta era:

$$\omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \simeq 9{,}8696 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

Conclui-se que $\omega_1^{QR} = \omega_1^{exacta}$

1) A análise do comportamento dinâmico de um sistema consiste na determinação das suas propriedades dinâmicas e/ou na determinação da resposta a determinado tipo de solicitação.

Para um sistema vibratório com um grau de liberdade, ligeiramente amortecido e com condições iniciais nulas, designando a função de resposta impulsiva por $h(t)$,

a) estabelecer a expressão da resposta $x(t)$ a uma solicitação transiente genérica $f(t)$.

Caracterizar e esboçar graficamente a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

b) solicitação impulsiva aplicada no instante $t=\tau$;

c) solicitação em degrau aplicada no instante $t=\tau$.

Para uma solicitação $f(t)$ harmónica, esboçar graficamente em função da frequência e para dois valores distintos da razão de amortecimento,

d) a amplitude da resposta e a fase, e a amplitude da força transmitida ao apoio.

Normalmente, o valor do amortecimento (razão de amortecimento) dum sistema é determinado experimentalmente.

e) Referir sucintamente dois métodos expeditos de identificação da razão de amortecimento.

2) A análise do comportamento dinâmico de um sistema pode basear-se num modelo discreto com n graus de liberdade, cujo modelo espacial é do tipo $[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$.

a) Definir coeficientes de influência de flexibilidade e de rigidez;

b) Estabelecer a relação existente entre a matriz de flexibilidade e a matriz de rigidez;

c) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez do modelo espacial.

3) O comportamento dinâmico de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}=\{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\}=\{\dot{x}\}_0$.

a) Indicar as propriedades em que assenta a técnica da análise modal e o interesse desta técnica na determinação do regime forçado;

b) Justificar a utilização da análise modal truncada. Comentar a influência, na precisão da resposta, dos modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada.

c) Indicar os pressupostos dos métodos de integração directa das equações diferenciais do movimento;

d) Caracterizar o método das diferenças finitas como método de integração directa.

4) O comportamento dinâmico de um sistema contínuo é descrito por uma equação diferencial de derivadas parciais e respectivas condições de fronteira e condições iniciais.

a) Exprimir, numa forma genérica, a resposta $v(x,t)$ duma viga a uma solicitação $f(x,t)$, utilizando a sobreposição modal;

b) Comentar a influência do número de modos naturais de vibração, considerados na análise modal truncada, na precisão da resposta da viga em termos [illegible] do deslocamento $v(x,t)$, do momento fletor $M_f(x,t)$ e do esforço transverso $T(x,t)$.

Exame de 2004 - 01 - 16

Parte Teórica

2) a) Coeficientes de influência de flexibilidade: a_{ij} correspondem a um deslocamento segundo o grau de liberdade i provocado por uma força unitária aplicada segundo o grau de liberdade j.

Coeficientes de influência de rigidez: K_{ij} correspondem a uma força aplicada segundo o grau de liberdade i provocada por um deslocamento unitário segundo o grau de liberdade j, quando todos os pontos (ou graus de liberdade) à excepção do ponto j estão fixos.

b) $[a] = [K]^{-1}$ V $[K] = [a]^{-1}$

c) Matriz de massa: matriz definida positiva (todos os valores próprios são positivos não nulos) e simétrica

Matriz de rigidez: matriz, geralmente, definida positiva mas no caso de sistemas semi-definidos (que admitem movimentos de corpo rígido) passa a ser semi-definida positiva (valores próprios nulos e/ou positivos); é também uma matriz simétrica.

VF

3. a) A análise modal baseia-se na projecção do sistema de equações diferenciais algébricas numa base modal que é constituída por n vectores modais linearmente independentes (ortogonais). Ao se fazer essa transformação de coordenadas consegue-se desacoplar o sistema em termos de inércia e de rigidez e, para certas condições (proporcionalidade ou Caughey), de amortecimento, podendo resolver cada equação da mesma forma que se resolve a equação diferencial de um sistema com um grau de liberdade.

b) A análise modal truncada permite através da selecção dos modos de vibração mais influentes na resposta determinar uma boa aproximação dessa resposta com um esforço computacional substancialmente reduzido. A precisão da resposta depende da selecção dos referidos modos que deve ser feita de forma às frequências naturais dos mesmos estarem contidas na banda de frequências de excitação e que deve incluir os modos correspondentes às frequências naturais mais baixas.

c) . Discretizar em instantes de tempo t_i as equações diferenciais do movimento;
. Verificar todas as equações diferenciais de movimento para os instantes de tempo discretizados;
. Estabelecer uma variação do deslocamento, velocidade ou aceleração entre os instantes de tempo sucessivos

d) . Método explícito
. Não tem arranque próprio
. Condicionalmente estável

4. a) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right) + \rho A(x)\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = f(t)$$

Como: $v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\cdot \eta_i(t)$ $\qquad p(x)\,g(t)$

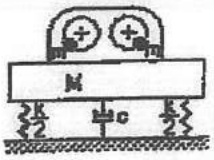
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\,\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\right)\eta_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \rho A(x)\,\phi_i(x)\,\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} = f(t)$$

c q d.

b) Para o deslocamento a influência é caracterizada por $\frac{1}{s^4}$, para o momento flector é $\frac{1}{s^2}$ e para o esforço transverso é de $\frac{1}{s}$, com s representando o nº de ordem dos modos naturais. Assim vê-se que a influência dos modos de frequência mais alta é pequena para a resposta em deslocamento, é maior para o momento flector e ainda mais influente para o esforço transverso

Exame de 2003-02-05
Parte teórica - 10 valores

1. O equipamento representado na figura possui dois discos que rodam em sentidos contrários com uma velocidade angular ω constante, e cujos centros de massa distam de e do seu centro de rotação. O sistema possui uma razão de amortecimento viscoso $\xi \cong 10\%$.



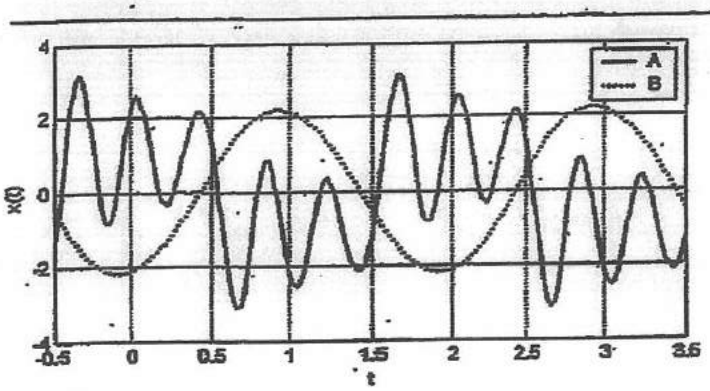
a) Caracterizar a excitação e o movimento vibratório do equipamento.
b) Representar o factor de amplificação dinâmica μ e o ângulo de fase ϕ em função da razão de frequência $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$. Indicar na figura o lugar geométrico dos valores correspondentes às frequências natural e de ressonância.
c) Representar a amplitude da força $f_T(t)$ transmitida ao apoios em função da razão de frequência $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$. Indicar na figura eventuais pontos notáveis.
d) Discutir a eficiência do isolamento em função dos parâmetros M, k e c para uma determinada frequência de funcionamento.

2. Os transdutores de vibração permitem medir o deslocamento ou a aceleração do estado vibratório de um sistema mecânico.
a) Indicar quais os elementos constituintes de um transdutor de vibrações e qual o seu princípio de funcionamento;
b) Representar as características de transmissibilidade e indicar as gamas de frequência de funcionamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.
c) Caracterizar, justificando, o atravancamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

3. A análise do comportamento dinâmico de um sistema consiste na determinação das suas propriedades dinâmicas e/ou na determinação da resposta a determinado tipo de solicitação.
a) Definir função de resposta em frequência e indicar quais as variantes existentes.
b) Indicar e caracterizar sucintamente as principais formas de representação da função de resposta em frequência.
c) Definir espectro de reposta (ou de choque) e justificar a sua utilização em análise dinâmica de estruturas.
d) Justificar a utilização do modelo não amortecido do sistema com um grau de liberdade no estabelecimento de espectros de choque para diferentes transientes.

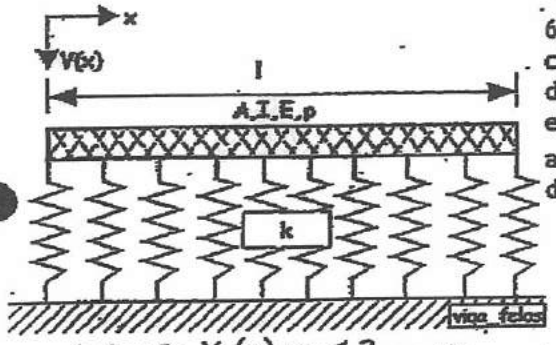
4. As equações do movimento de um sistema linear discreto não amortecido são do tipo $[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{f(t)\}$.
a) Definir coordenadas generalizadas e coordenadas naturais ou modais.
b) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez.
c) Definir modo natural e forma natural de vibração.
d) Indicar e escrever as propriedades mais relevantes dos vectores modais.
e) Sendo o vector $\{u\}_r$ uma das formas naturais de vibração, demonstrar que a resposta em regime livre a condições iniciais $\{q(0)\} = \{u\}_r$ e $\{\dot{q}(0)\} = \{0\}$ é uma oscilação harmónica de frequência ω_r e de configuração espacial $\{u\}_r$.

Exame de 2003-02-05
Parte teórica - 10 valores



5) A figura representa a resposta no tempo de dois sistemas vibratórios A e B distintos a uma mesma solicitação periódica,

a) Comentar.



6) A figura representa uma viga de comprimento ℓ, cuja secção recta apresenta uma área A e momento de 2ª ordem I, e cujo material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. A viga está apoiada sobre uma fundação linear elástica de rigidez distribuída e uniforme de valor k.

a) Estabelecer e caracterizar a equação diferencial do movimento do sistema.

b) Escrever as condições de fronteira que devem ser verificadas pelas formas naturais de vibração $V_r(x)\ r=1,2,\ldots,\infty$.

c) Estabelecer o problema característico associado cujas soluções constituem os modos naturais de vibração, $(\omega_r; V_r(x))\ r=1,2,\ldots,\infty$.

Exame - 2003-02-05

Parte Teórica

4. a) As coordenadas generalizadas são coordenadas que descrevem o movimento de um sistema discreto, formando um vector que está projectado numa base qualquer.

As coordenadas modais ou naturais são as coordenadas generalizadas quando projectadas numa base modal, que é uma base formada pelos vectores modais.

b) Matriz de massa:
. É uma matriz simétrica;
. É uma matriz definida positiva (valores próprios > 0)

Matriz de rigidez:
. É uma matriz simétrica;
. É uma matriz, geralmente, definida positiva mas no caso de sistemas semi-definidos (que admitem movimentos de corpo rígido) passa a ser semi-definida positiva (valores próprios nulos e/ou positivos).

c) O modo natural é a solução do problema característico, constituindo-se por um par: frequência natural e forma natural. Representam um movimento harmónico síncrono a determinada ω.

A forma natural é a configuração espacial assumida pelo sistema quando este se encontra a vibrar em regime livre com uma frequência natural determinada.

d) . Ortogonalidade (ortonormalidade) entre os vários vectores modais relativamente à massa e à rigidez:

$$\{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_s = 0 \quad \text{para } r \neq s \quad \text{com } r, s = 1, \cdots, n$$

$$\{\phi\}_r^T [k] \{\phi\}_s = 0 \quad \text{para } r \neq s \quad \text{com } r, s = 1, \cdots, n$$

. Por serem ortogonais são linearmente independentes e portanto constituem uma base do espaço de dimensão n podendo definir qualquer vector nesse espaço.

e) $\{q(t)\} = \{u\} \cos(\omega t - \phi)$

Mas como se sabe pelo teorema de expansão, $\{q(t)\}$ pode ser definido como uma combinação linear dos modos naturais de vibração, logo:

$$\{q(t)\} = \sum_{i=1}^{n} c_i \{u\}_i$$

Com c_i definido como sendo:

$$c_i = \{\phi\}_i^T [m] \{q(t)\}$$

Mas $\{q(0)\} = \{u\}_r \overset{\text{pela prop. ortogonalidade}}{\Rightarrow} c_r = 1 \wedge c_i = 0, \; i \neq r$

Ficando:

$$\{q(t)\} = \{u\}_r$$

VD

Como por hipótese:

$$\{q(t)\} = \{u\} \cos(\omega t - \phi)$$

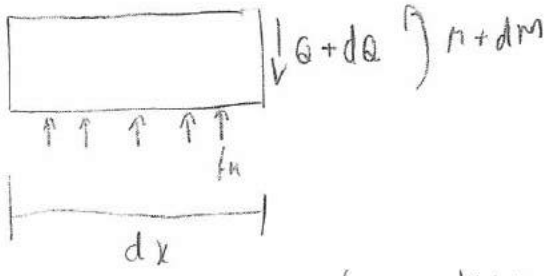
Então:

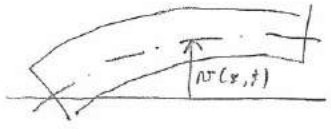
$$\{q(t)\} = \{u\}_1 \cos(\omega_1 t - \phi)$$

c.q.d.

5. a) Uma solicitação periódica pode ser aproximada por um somatório de harmónicos (série de Fourier). Assim sendo, pelo princípio da sobreposição de efeitos, a resposta será obtida pelo somatório das respostas a cada um dos harmónicos. No caso da frequência de excitação de um dos harmónicos ser próxima da frequência natural do sistema há uma amplificação da influência da resposta a esse harmónico causando uma interferência nos harmónicos principais (os de frequências mais baixas), foi o caso do sistema A. No caso do B o harmónico principal já era o harmónico de resposta com a frequência natural mais próxima da frequência de excitação.

6. a)





$$f_H = K(x)\, v(x,t)\, dx$$

K_0 (Euler - Bernoulli)

$$\begin{cases} \sum M = 0 \\ \sum F^y = \bar{Q} \end{cases} \begin{cases} -M + (M + dM) - (Q + dQ)\,dx + \left(K(x)\,v(x,t)\,dx\right)\frac{dx}{2} = 0 \\ Q + K(x)\,v(x,t)\,dx - (Q + dQ) = \rho A(x)\,dx\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

Como: $dM = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}\,dx$ e $dQ = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\,dx$

$$\begin{cases} \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}\,dx = Q\,dx \\ K(x)\,v(x,t)\,dx - \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\,dx = \rho A(x)\,dx\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ K(x)\,v(x,t) - \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = \rho A(x)\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

Pela Mecânica dos Sólidos: $M(x,t) = EI\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$, logo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right) + \rho A(x)\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = K(x)\,v(x,t)$$

c.q.d.

Caracterizar: É uma equação diferencial de 4ª ordem necessitando de 4 condições fronteira em x e 2 em t.

b) $$EI\,\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0,\ell} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\,\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0,\ell}\right) = 0$$

c) $v(x,t) = V(x)\, g(t) = V(x) \cos(\omega t - \phi)$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 V(x) \cos(\omega t - \phi)$$

Logo:

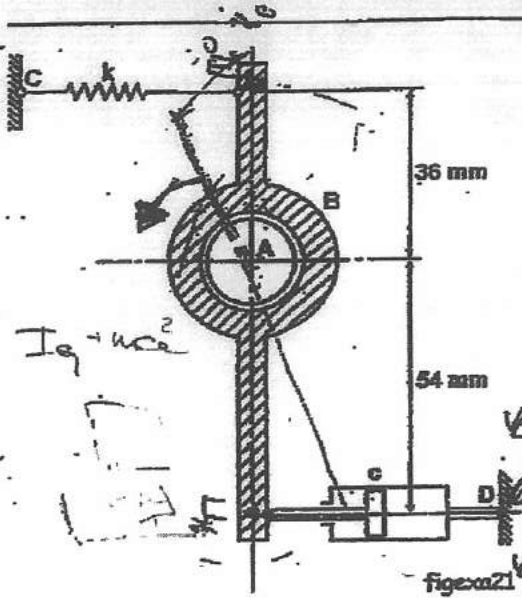
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right) - \omega^2 \rho A(x) V(x) = k(x) V(x)$$

Em regime livre:

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right) = \omega^2 \rho A(x) V(x)}$$

↑ problema característico

Exame de 2003-02-05
Parte prática - 10 valores



figexx21

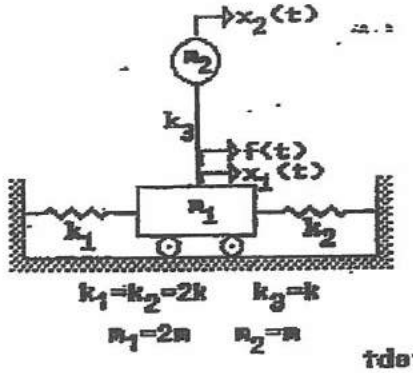
1) O corpo representado na figura oscila em torno do ponto A, sendo o seu movimento controlado por uma mola linear de rigidez k e um amortecedor viscoso de constante c.
Num ensaio em regime livre, o sistema responde com uma vibração livre amortecida de frequência igual a 2 Hz, medindo-se os seguintes valores da vibração:
- 1ª oscilação: $\theta_1 = 10°$;
- 3ª oscilação: $\theta_2 = 0.62°$.

Sabendo que a rigidez da mola é de 126 Nm^{-1}, determinar:

a) o decremento logarítmico δ e a razão de amortecimento ξ;
b) a frequência natural angular não amortecida ω_n;
c) o momento de inércia I_A do corpo em relação ao eixo que passa pelo ponto A;
d) o valor da constante c do amortecedor;

Admitindo que o sistema é excitado por um momento aplicado em A, $M_A(t) = M_m \cos(\omega t)$, com $M_m = 0.1$ Nm, determinar:

e) a frequência de excitação ω para a qual a amplitude de resposta é $\Theta(\omega) = 5°$.
f) a reacção no apoio A.

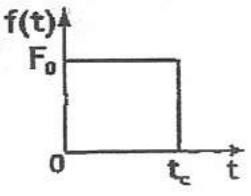


fdof14

2) O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.
As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera respectivamente.

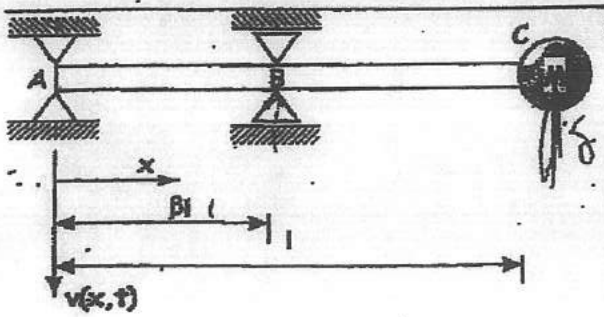
a) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.
b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.
c) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.

Para $k = 200$ Nm^{-1} e $m = 2$ kg,



d) Determinar o valor máximo da resposta $x_1(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_c = 0.148$ s
e) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ da resposta da massa m_1 quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 14.4$ $rads^{-1}$.
f) Redimensionar a rigidez k_3 da barra de modo que a amplitude $X_1(\omega)$ da massa m_1 seja nula.

Exame de 2003-02-05
Parte prática - 10 valores



(3) A viga representada na figura encontra-se simplesmente apoiada em A e B, comporta uma massa concentrada M na extremidade C e possui uma secção recta uniforme de área A e de momento de 2ª ordem I. O material da viga possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ.
Pelo método da energia de Rayleigh e admitindo para a forma fundamental de vibração lateral (flexão) a deformada $V(x)=ax^2+bx+c$,

determinar:

a) as constantes a, b e c para um deslocamento lateral δ em $x=\ell$;
b) a energia potencial máxima e a energia cinética máxima;
c) a estimativa da frequência fundamental de vibração. Comentar o resultado.
d) Esboçar a variação da frequência fundamental para $\beta \in [0,1]$.
e) Discutir o resultado obtido na alínea anterior com M=0, para os valores limite β=1 e β=0. Comparar os valores obtidos com as respectivas frequências fundamentais exactas. Sugestão: exprimir o resultado da alínea anterior na forma $\omega=\omega_0 x f(\beta)$.
f) Sugerir uma função de aproximação de tipo harmónico para o problema.

c.f.

$v(0,t)=0$

$v(\beta l,t)=0$

$EI\dfrac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x^3}=mg$

$EI\dfrac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2}=0$

Parte Prática

2. a)

Em. cinética:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Em. potencial:

$$V = \frac{1}{2} (K_1 + K_2) x_1^2 + \frac{1}{2} K_3 (x_2 - x_1)^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = f(t) \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1) = f(t)$$

$$Q_2 = f(t) \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = (K_1 + K_2) x_1 - K_3 (x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = K_3 (x_2 - x_1)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2 + k_3) x_1 - k_3 x_2 = f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_3 x_1 + k_3 x_2 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $\{x(t)\} = \{u\} \cos(\omega t - \phi)$

$$\begin{bmatrix} 5k - \omega^2 2m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5k - \omega^2 2m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 \cong 0{,}8481 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad V$$

$V\ \omega_2 \cong 1{,}6676 \sqrt{\frac{k}{m}}$

1ª forma modal:

$$\left(5m - 0{,}7192 \frac{k}{m}\right) u_1 - k u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{5 - \frac{0{,}7192}{m}} \cdot u_2$$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{5 - \frac{0{,}7192}{m}} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª forma natural:

$$\left(5K - 2{,}7809 \cdot \frac{K}{m}\right) u_1 - K u_2 = 0 \iff$$

$$\iff u_1 = \frac{1}{5 - \frac{2{,}7809}{m}}$$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{5 - \frac{2{,}7809}{m}} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c)

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^T [m] \{u\}_i}} \{u\}_i$$

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{0{,}004956\,(m - 0{,}09589)}{(m - 0{,}14384)^2} + 1{,}08\,m + 0{,}023014}} \begin{Bmatrix} \frac{1}{5 - \frac{0{,}7192}{m}} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{0{,}07424\,(m - 0{,}37079)}{(m - 0{,}55618)^2} + 1{,}08\,m + 0{,}08899}} \begin{Bmatrix} \frac{1}{5 - \frac{2{,}7809}{m}} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Para $m = 2$ kg:

$$\{\phi_1\} = \frac{1}{1{,}4784} \begin{Bmatrix} \frac{1}{5 - \frac{0{,}7192}{2}} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}1458 \\ 0{,}6764 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{1,5189}\begin{Bmatrix} \frac{1}{5-\frac{2,7809}{2}} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,1824 \\ 0,6584 \end{Bmatrix}$$

Então: $[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,1458 & 0,1864 \\ 0,6764 & 0,6584 \end{bmatrix}$ $\quad [\Phi]^T \{f(t)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8,481^2 & 0 \\ 0 & 16,676^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,1458\, f(t) \\ 0,6764\, f(t) \end{Bmatrix}$$

d)

1º eq.: $T_{n,1} = \frac{2\pi}{8,481} \simeq 0,7409\ s > t_c$ → máximo: $2\frac{F_{01}}{k_{01}}\operatorname{sen}\frac{t_c}{2}$

2ª eq.: $T_{n,2} = \frac{2\pi}{16,676} \simeq 0,3768\ s > t_c$

$$\eta_{1,max} = 2 \times \frac{0,1458\ F_0}{8,481^2} \operatorname{sen}\left(\frac{8,481}{2} \times 0,148\right) \simeq 0,00238\ F_0$$

$$\eta_{2,max} = 2 \times \frac{0,6764\ F_0}{16,676^2} \operatorname{sen}\left(\frac{16,676}{2} \times 0,148\right) \simeq 0,00459\ F_0$$

Como: $\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \Rightarrow X_1(\omega) = \overset{0,1458}{\phi_{11}}\ \eta_1 +$

$+ \overset{0,1864}{\phi_{12}}\ \eta_2$

Portanto, o que se pode garantir é que:

$$|X_1(t)|_{max} \leq \phi_{11}\,\eta_{1,max} + \phi_{12}\,\eta_{2,max} \simeq 0,00120\ F_0$$

e)

$$\begin{bmatrix} 1000 - 4\omega^2 & -200 \\ -200 & 200 - 2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1(\omega) = \frac{(200 - 2\omega^2)\, F}{(1000 - 4\omega^2)(200 - 2\omega^2) - 200^2}$$ ← expressão 9.19

Para $\omega = 14{,}4$ rad/s:

$$X_1(\omega) \cong 0{,}008215\, F \qquad [m] \quad \text{se } F \text{ estiver em } [N]$$

f) Voltando às letras:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(2 m, 2 kg, 200, 2 K)

Então:

$$\begin{bmatrix} 800 + k_3 - 4\omega^2 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 - 2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_1(\omega) = \frac{(k_3 - 2\omega^2)\, F}{(800 + k_3 - 4\omega^2)(k_3 - 2\omega^2) - k_3^2}$$

Objectivo: $X_1(\omega) = 0$ para $\omega = 14{,}4$ rad/s

Logo:

$$K_3 - 2 \times 14{,}4^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{K_3 = 414{,}72 \ N/m}$$

3. a) Cond fronteira geométricas:

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow a \underbrace{x^2}_{=0} + b \underbrace{x}_{=0} + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$V(x)\Big|_{x=\beta l} = 0 \Rightarrow a \beta^2 l^2 + b \beta l = 0 \Leftrightarrow b = -\beta l \cdot a$$

$$V(x)\Big|_{x=l} = \delta \Rightarrow a l^2 - (\beta l a) \cdot l = \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a (l^2 - \beta l^2) = \delta \Rightarrow a = \frac{\delta}{l^2(1-\beta)}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\delta}{l^2(1-\beta)} \\ b = -\dfrac{\delta \cdot \beta}{l(1-\beta)} \\ c = 0 \end{cases}$$

b)

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \cancel{V_{cfm}}^{=0} =$$

$$= \frac{EI}{2}\int_0^l 4a^2\, dx = \frac{EI}{2}\cdot 4a^2 l$$

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\,(V(x))^2\, dx + \frac{1}{2} M\, V(l)^2\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\cdot\left(\frac{a^2 l^5}{5} + \frac{1}{2}ab l^4 + \frac{1}{3}b^2 l^3\right) + \frac{1}{2} M \delta^2\right)$$

Com $\begin{cases} a = \dfrac{\delta}{l^2(1-\beta)} \\ b = -\dfrac{\delta\beta}{l(1-\beta)} \end{cases}$

c)

$$R(V(x)) = \omega^2 = \frac{\frac{EI}{\cancel{2}}\, 4a^2 l}{\frac{\rho A}{\cancel{2}}\left(\frac{a^2 l^5}{5} + \frac{abl^4}{2} + \frac{b^2}{3} l^3\right) + \frac{1}{\cancel{2}} M \delta^2} =$$

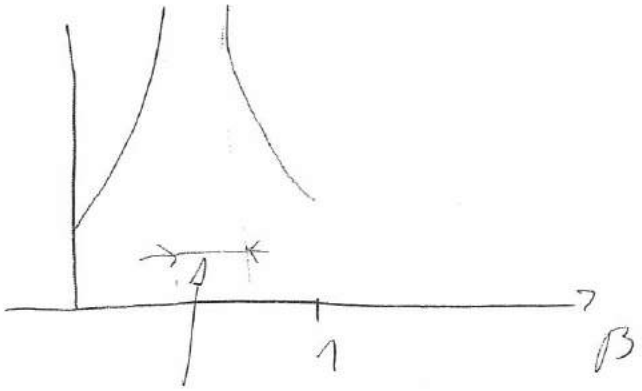
$$= \frac{EI}{\rho A l^4}\cdot\frac{4\frac{\delta^2}{l^4(1-\beta)^2}\, l}{\frac{\delta^2}{5l^4(1-\beta)^2} l - \frac{\delta^2\beta}{l^3(1-\beta)^2} + \frac{\delta^2\beta^2}{3l^3(1-\beta)^2} + \frac{M\delta^2}{\rho A l^4}} =$$

$$= \frac{EI}{\rho A l^4}\cdot\frac{4\cancel{l}}{\frac{\cancel{l}}{5} - \beta\cancel{l} + \frac{\beta^2\cancel{l}}{3} + \frac{(1-\beta)^2 M}{\rho A l}}$$

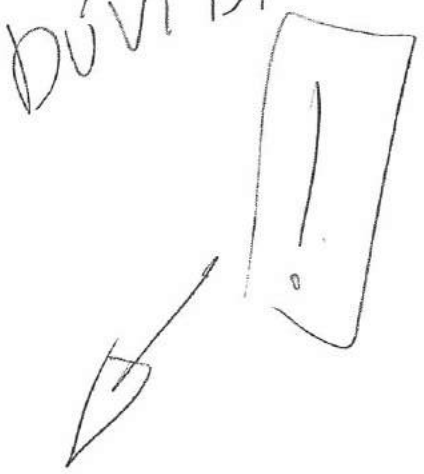
Comentário: De reparar que a estimativa da frequência fundamental depende da posição do apoio simples intermédio, βl

d)
$$\omega = \sqrt{R(V(x))} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{5} - \beta + \frac{\beta^2}{3} + \frac{(1-\beta)^2 M}{\rho A l}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

↑ massa da viga



Radicando negativo



Fiz mal qualquer coisa!

e) Não adianta ir pois está bem a anterior

f) $V(x) = a x - b \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right)$ tal que $\begin{cases} V(x)|_{x=l} = \delta \\ V(1)|_{x=\beta l} = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} — \\ a\beta l = b \operatorname{sen}(\pi\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b \operatorname{sen}\pi\beta}{\beta l} \cdot l = \delta \\ a = \frac{b \operatorname{sen}\pi\beta}{\beta l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\delta\beta}{\operatorname{sen}(\pi\beta)} \\ a = \frac{\delta}{l} \end{cases}$$

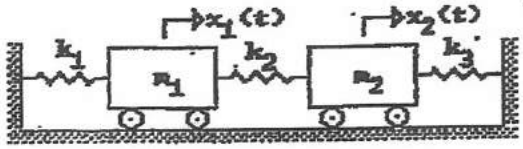
FEUP-Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Vibrações de Sistemas Mecânicos

Exame de 2003-01-10
Parte teórica - 10 valores

1) Para um sistema vibratório, definir:
   a) frequência natural de vibração;
   b) frequência de ressonância de amplitude e de fase;
   c) batimento.

2) O amortecimento desempenha um papel importante no comportamento vibratório de um sistema mecânico.
   a) Caracterizar a influência do amortecimento do sistema na resposta a uma solicitação harmónica e transiente;
   b) Discutir a influência do amortecimento na eficiência do isolamento de vibrações;
   c) Indicar e caracterizar sucintamente dois métodos de determinação experimental do amortecimento de um sistema.

3) Os vectores modais representativos das formas naturais de vibração de um sistema linear discreto não amortecido e com dois graus de liberdade representado na figura são: $\{u\}_1^T = \{1 \quad 1.6\}^T$ e $\{u\}_2^T = \{1 \quad -0.8\}^T$.



   a) Definir modo natural e forma natural de vibração;
   b) Representar graficamente o movimento $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas massas do sistema para o segundo modo natural de vibração;
   c) Indicar um conjunto de condições iniciais a aplicar ao sistema de modo que este responda com um movimento idêntico ao primeiro modo natural de vibração;
   d) Para uma solicitação harmónica $f(t) = F \sin \omega t$, caracterizar a resposta do sistema e representar graficamente a respectiva amplitude de resposta, indicando eventuais pontos notáveis.

4) A análise do comportamento dinâmico de um sistema mecânico assenta num modelo matemático: modelo espacial, modelo modal e modelo de resposta em frequência.
   a) Caracterizar, justificando, as formas da energia potencial elástica e da energia cinética;
   b) O modelo de resposta em frequência pode ser determinado a partir do modelo espacial ou do modelo modal. Comentar.
   c) Representar graficamente a função de resposta em frequência directa de um sistema linear discreto com 3 graus de liberdade e as respectivas contribuições modais.

5) A resposta dinâmica de um sistema contínuo é determinada por análise ou sobreposição modal.
   a) Indicar a propriedade fundamental em que assenta esta técnica;
   b) Justificar a utilização de uma base modal truncada;
   c) Referir os critérios básicos que condicionam a escolha da base modal;
   d) Indicar em que condições específicas um determinado modo não contribui para a resposta do sistema.

6) O quociente de Rayleigh constitui um conceito relevante em análise de vibrações.
   a) Indicar as propriedades fundamentais do quociente de Rayleigh;
   b) Como justificar que uma aproximação porventura "grosseira" de uma forma natural de vibração conduza, através do quociente de Rayleigh, a uma boa aproximação da frequência natural correspondente?
   c) Indicar os valores limite do quociente de Rayleigh para os sistemas discretos e para os sistemas contínuos;
   d) Indicar os requisitos da aproximação a utilizar no quociente de Rayleigh para os sistemas discretos e para os sistemas contínuos.

Exame - 2003 - 01 - 10

Parte Teórica

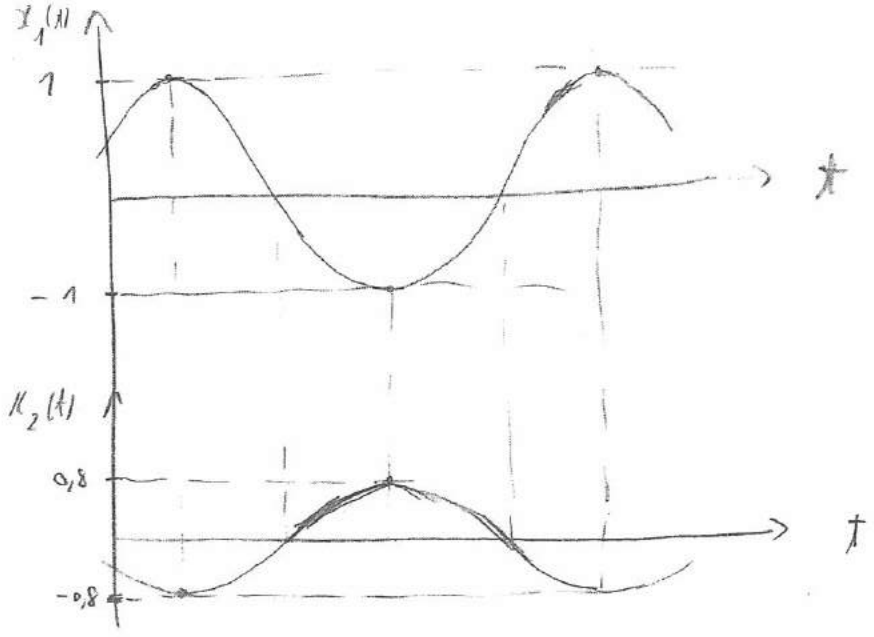
3. a) Modo Natural:

É um dos n movimentos harmónicos síncronos $\{x(t)\}_i$ com $i = 1, \dots, n$ caracterizados pelas frequências naturais ω_i com $i = 1, \dots, n$ e pelos n-vectores modais $\{u\}_i$ $i = 1, \dots, n$, que são solução do problema característico.

Forma Natural:

Configuração espacial assumida pelo sistema, que é representada por um vector modal $\{u\}_i$ $i = 1, \dots, n$ associada a uma frequência natural ω_i $i = 1, \dots, n$.

b) $$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,8 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

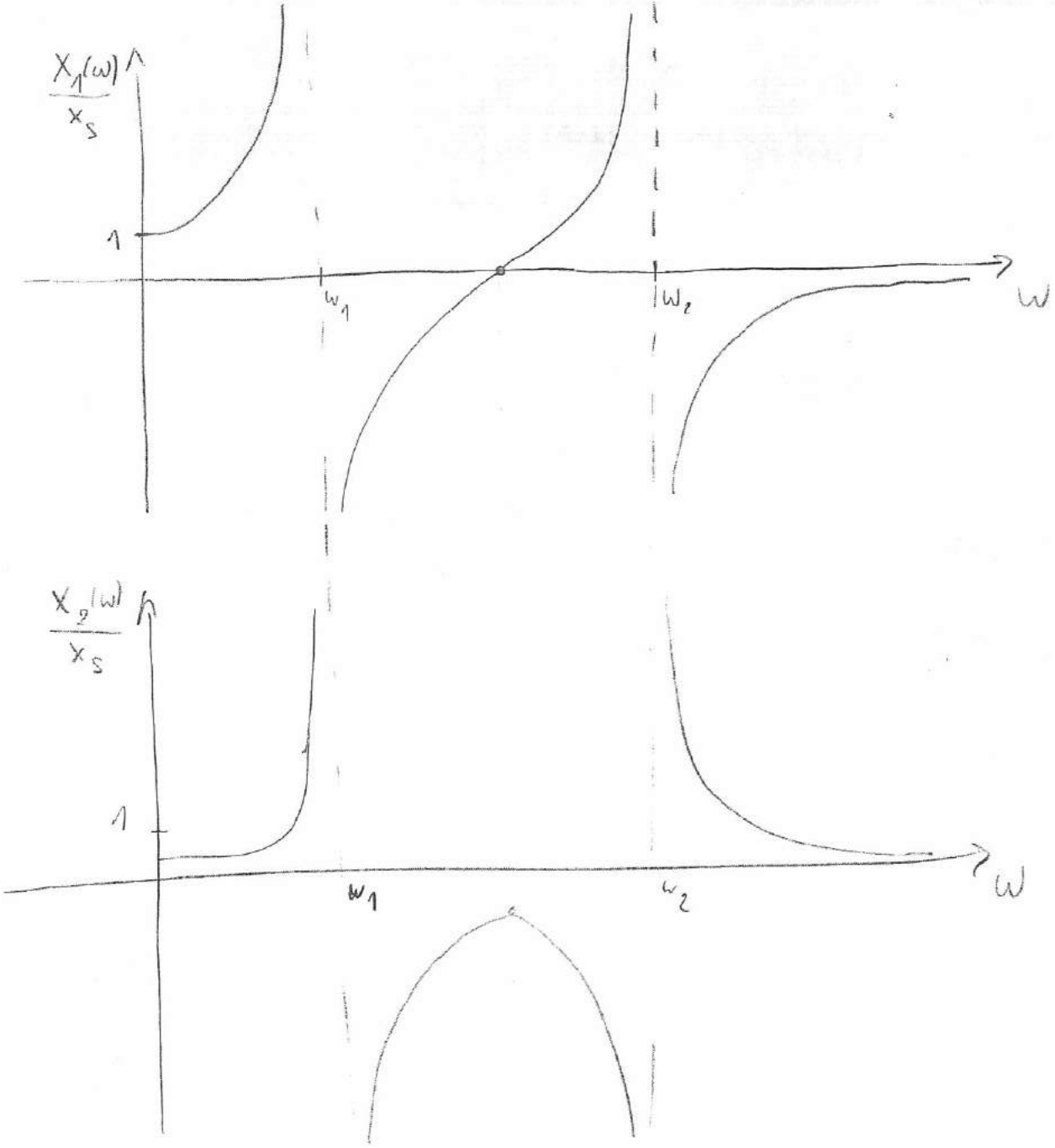


c)

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}6 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\dot{X}_0\} = \{0\} \quad ; \quad \{f(t)\} = \{0\}$$

(regime livre)

d)



Assumi que $f(t)$ estava aplicada em (1).

Caracterização:

- $\omega < \omega_1$ movimento em fase
- $\omega_1 < \omega < \omega_2$ movimento em fase e em oposição de fase

. $w > w_2$ movimento em oposição de fase

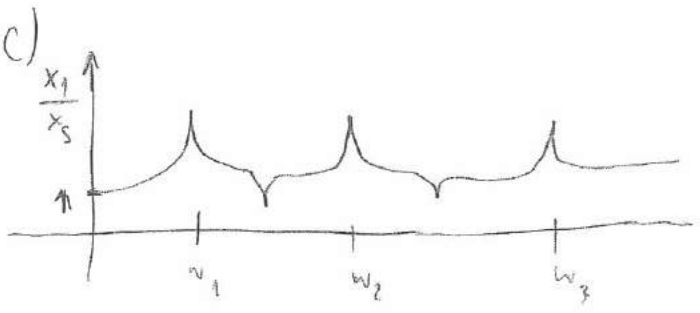
. Existe um valor particular de w para o qual $X_1(w)$ é nulo.

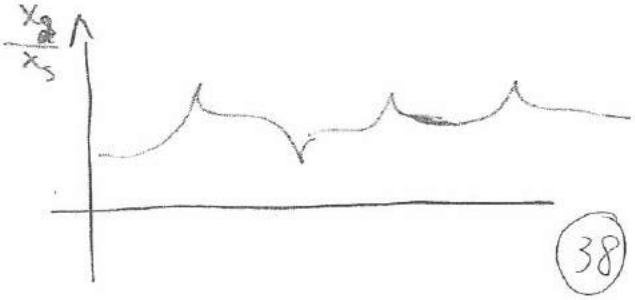
4. a) A energia cinética é uma forma quadrática definida positiva uma vez que é calculada a partir da matriz de massa (do quadrado das velocidades, sendo a matriz de massa definida positiva.

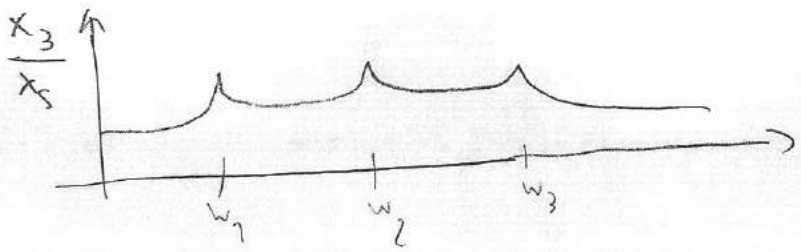
A energia potencial é uma forma quadrática, geralmente, definida positiva mas que no caso de sistemas semi-definidos passa a ser semi-definida positiva (tem alguns valores próprios nulos). Isto porque a matriz de rigidez é semi-definida positiva para estes casos.

b) É verdade porque qualquer um dos modelos permite a obtenção da resposta como sendo uma entidade complexa e como tal permite o seu traçado em magnitude e fase em função da frequência

c)







A influência de cada modo faz-se sentir quando w está mais próximo da sua frequência natural associada.

5. a) A propriedade fundamental em que se baseia a técnica de sobreposição modal é a ortogonalidade das formas naturais dos modos modais, uma vez que é esta propriedade que garante que os vectores modais são linearmente independentes e que, portanto, a sua combinação linear pode descrever qualquer vector no espaço de dimensão n (sendo n o nº de vectores modais).

b) Utiliza-se uma base modal truncada porque ao se seleccionar os modos mais influentes na resposta do sistema e se eliminar os restantes o esforço computacional é muito reduzido.

c) Escolha dos modos de mais baixa energia (mais baixa frequência) e, em particular, escolha dos modos associados a frequências naturais próximas das frequências de excitação.

d) No caso de solicitações concentradas coincidirem com os nodos desse modo ou no caso de uma deformação inicial que seja a combinação de um ou mais

vectores modais combinados sem incluir o modo em causa e o movimento ser em regime livre.

6. a) . O quociente de Rayleigh é um majorante da frequência fundamental;
. Apresenta um valor estacionário na vizinhança das formas naturais

b) Pela 2ª propriedade atrás enunciada.

c) Sistemas discretos:

$$w_1^2 \leq R(\{v\}) \leq w_n^2$$

Com w_1 sendo a freq. fundamental e w_n sendo a frequência natural do último modo de vibração.

Sistemas contínuos:

$$w_1^2 \leq R(\{v\})$$

Não há limite superior porque $w \longrightarrow \infty$

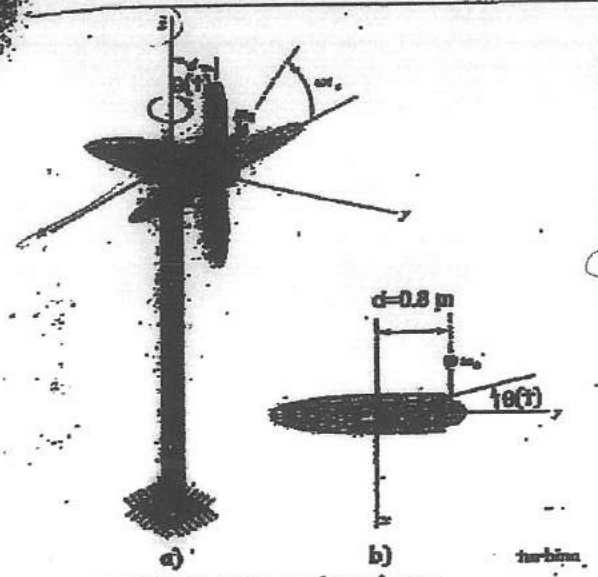
d) Para os sistemas discretos o vector $\{v\}$ pode ser qualquer vector não nulo, sendo que quanto mais próximo ele for da forma modal da frequência natural que se quer calcular, melhor é a aproximação.

Para os sistemas contínuos há 2 abordagens: forma forte e forma fraca. Na forte as funções de

aproximação designam-se funções teste. (têm de ser deriváveis um nº de vezes igual à ordem do sistema e têm de obedecer às condições fronteira). Na forma fraca designam-se funções admissíveis e têm de ser deriváveis um nº de vezes igual a metade da ordem do sistema e têm de verificar apenas as condições fronteira geométricas.

FEUP-Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Vibrações de Sistemas Mecânicos

Exame de 2003-01-10
Parte prática - 10 valores



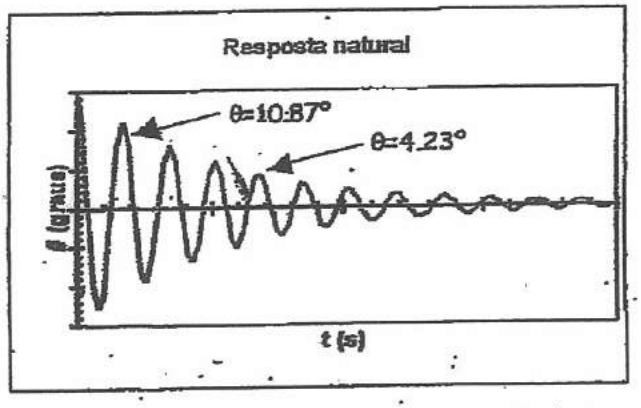
1) A turbina eólica representada na figura está suportada por uma coluna de rigidez torsional $k=9.6\times10^6$ Nm/rad e coeficiente de amortecimento c. O centro de massa do sistema rotor das pás da turbina de massa $m_0=1957$ kg encontra-se deslocado de uma distância "e" do eixo de rotação Oy do conjunto. O momento de inércia da turbina segundo o eixo Oz é $I_z=70$ kgm^2. A turbina roda a 250 rpm.

Desprezando os efeitos de flexão da coluna, determinar:

a) a equação diferencial do movimento de vibração de torção da coluna em torno do eixo Oz.

Num ensaio em regime livre registou-se a resposta θ(t) do sistema que se representa na figura. Determinar:

b) a razão de amortecimento ξ e a constante de amortecimento c_t da coluna;



c) a frequência natural amortecida ω_d;

d) a excentricidade máxima "e" de modo a que em regime permanente a amplitude de vibração não exceda 2.5°.

e) a expressão do momento torsor transmitido à base da coluna de suporte.

2) Um veio de dois tramos está fixo em $x=0$ e livre em $x=\ell$, e a secção recta apresenta um momento polar $2I_p$ para $0\le x<\frac{\ell}{3}$ e I_p para o tramo $\frac{\ell}{3}<x<\ell$. O material do veio possui módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. Utilizando as funções de aproximação $\Theta_1(x)=\sin\frac{\pi x}{2\ell}$ e $\Theta_2(x)=\sin\frac{3\pi x}{2\ell}$,

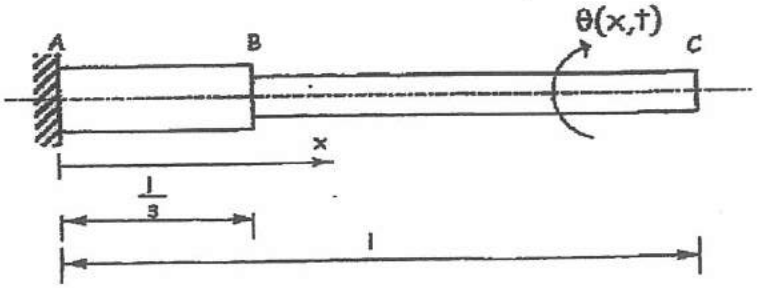
a) Esboçar a representação gráfica das duas funções de aproximação e classificá-las;

b) Determinar, pelo método da energia de Rayleigh, uma estimativa da frequência natural fundamental de torção;

c) Determinar, pelo método de Rayleigh-Ritz, uma estimativa das frequências naturais e das respectivas formas naturais de vibração de torção;

d) Estabelecer a equação de frequências naturais de vibração de torção.

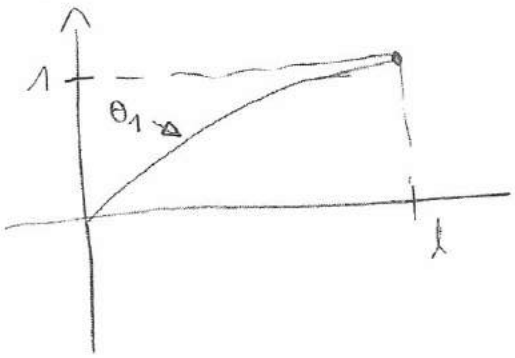
e) Aproximando o veio representado por um veio de secção constante de momento polar I_p, determinar a resposta $\theta(x,t)$ para um momento torsor $M_t(t)=M_0\sin\omega t$ aplicado na extremidade $x=\ell$.

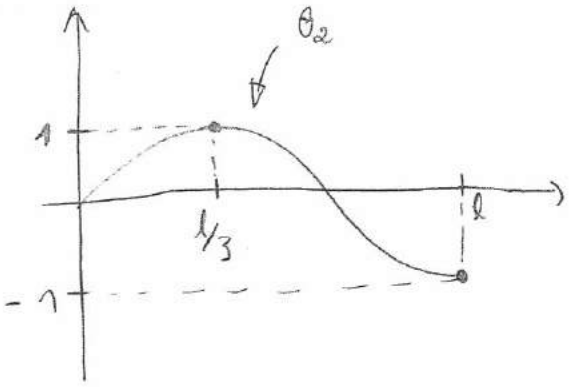


Parte Prática

2. a) $\theta_1 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi/2l} = 4l$

$\theta_1 \rightarrow T = \frac{2\pi}{3\pi/2l} = \frac{4l}{3}$





Ambas as funções são deriváveis sempre.

Condições fronteira:

$\theta_1(x)\big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2l} \cdot 0\right) = 0$ ✓

$\left.\frac{d\,\theta_1(x)}{dx}\right|_{x=l} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2l}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2l} x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$ logo trata-se de uma função teste.

$\theta_2(x)\big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2l} \times 0\right) = 0$ ✓

$\frac{d\,\theta_2(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3\pi}{2l}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2l} x\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

b) Utilizar-se-á θ_1 por ser mais próxima da forma fundamental.

En. potencial:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l G I_p(x)\left(\frac{d^2\theta_1(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \cancel{V_{cfm}}^{=0} =$$

$$= \frac{\cancel{2}GI_p}{\cancel{2}}\int_0^{\frac{l}{3}}\left(-\frac{\pi^2}{2l}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right)^2 dx + \frac{GI_p}{2}\int_{\frac{l}{3}}^{l}\left(-\frac{\pi^2}{2l}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right)^2 dx =$$

$$= GI_p\left(\frac{-3\pi^3\sqrt{3} + 2\pi^4}{48l} - 0\right) + \frac{GI_p}{2}\left(\frac{\pi^4}{8l} - \frac{-3\pi^3\sqrt{3}+2\pi^4}{48l}\right) =$$

$$= GI_p\left(\frac{\pi^4}{16l} + \frac{-1{,}5\pi^3\sqrt{3} + \pi^4}{48l}\right)$$

En. Cinética:

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho I_p\left(\theta_1(x)\right)^2 dx + \cancel{T_{cfm}}\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\cancel{2}\rho I_p}{\cancel{2}}\int_0^{l/3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2l}x\right)^2 dx + \frac{\rho I_p}{2}\int_{l/3}^{l}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2l}x\right)^2 dx\right) =$$

$$= \omega^2\left(\rho I_p\left(\frac{-l(3\sqrt{3}-2\pi)}{12\pi} - 0\right) + \frac{\rho I_p}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{-l(3\sqrt{3}-2\pi)}{12\pi}\right)\right) =$$

$$= \omega^2\left(\rho I_p\left(\frac{l}{4} + \frac{-l(1{,}5\sqrt{3}-\pi)}{12\pi}\right)\right)$$

$$R(\theta(x)) = \omega^2 = \frac{G I_R \left(\frac{\pi^4}{16\ell} + \frac{-1{,}5\pi^3\sqrt{3} + \pi^4}{48\ell} \right)}{\ell I_R \left(\frac{1}{4} + \frac{-\ell(1{,}5\sqrt{3} - \pi)}{12\pi} \right)} =$$

$$= \left(\frac{G}{\ell}\right)^{c^2} \frac{\frac{3\pi^4 - 1{,}5\pi^3\sqrt{3}}{48\ell}}{\frac{4\pi\ell - 1{,}5\ell\sqrt{3}}{12\pi}} = c^2 \cdot \frac{3\pi^3 - 1{,}5\pi^2\sqrt{3}}{16\pi\ell^2 - 6\ell^2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \omega = c \cdot \sqrt{\frac{3\pi^3 - 1{,}5\pi^2\sqrt{3}}{16\pi\ell^2 - 6\ell^2\sqrt{3}}}$$

c) Não faz

d) O meio tem 2 trocos de secção constante.

$$\theta_1(x,t) = \left(A_1 \cos\frac{\omega}{c}x + B_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$\theta_1(x,t) = \left(A_2 \cos\frac{\omega}{c}x + B_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$\frac{\partial\theta_1(x,t)}{\partial x} = \frac{\omega}{c}\left(-A_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x + B_1\cos\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$\frac{\partial\theta_2(x,t)}{\partial x} = \frac{\omega}{c}\left(-A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x + B_2\cos\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

Cond. fronteira:

$$\theta_1(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \iff \boxed{A_1 = 0}$$

$$\frac{\partial \theta_2(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \iff -A_2 \operatorname{sen}\frac{w}{c} l + B_2 \cos\frac{w}{c} l = 0 \iff \boxed{B_2 = A_2 \operatorname{tg}\frac{w}{c} l}$$

$$\theta_1(x,t)\Big|_{x=\frac{l}{3}} = \theta_2(x,t)\Big|_{x=\frac{l}{3}} \iff B_1 \operatorname{sen}\frac{w}{c}\frac{l}{3} = A_2 \cos\frac{w}{c}\frac{l}{3} + B_2 \operatorname{sen}\frac{w}{c}\frac{l}{3} \iff$$

$$\iff B_1 = A_2 \operatorname{cotg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + B_2 \implies \boxed{B_1 = A_2\left(\operatorname{cotg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + \operatorname{tg}\frac{w}{c} l\right)}$$

$$G 2I_p \frac{\partial \theta_1(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{l}{3}} = G I_p \frac{\partial \theta_2(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{l}{3}} \iff 2 B_1 \cos\frac{w}{c}\frac{l}{3} =$$

$$= -A_2 \operatorname{sen}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + B_2 \cos\frac{w}{c}\frac{l}{3} \iff 2B_1 = -A_2 \operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + B_2 \implies$$

$$\implies 2B_1 = A_2\left(-\operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + \operatorname{tg}\frac{w}{c} l\right) \iff \boxed{B_1 = \frac{A_2}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{w}{c} l - \operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{l}{3}\right)}$$

Então:

$$\frac{A_2}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{w}{c} l - \operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{l}{3}\right) = A_2\left(\operatorname{cotg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + \operatorname{tg}\frac{w}{c} l\right) \iff$$

$$\iff \boxed{2\operatorname{cotg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + \operatorname{tg}\frac{w}{c} l + \operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} = 0}$$

eq. das frequências naturais de vibração de torção.

e) Não sai.

1) Para um sistema vibratório ligeiramente amortecido, com condições iniciais nulas, caracterizar sucintamente a respectiva resposta x(t) para as seguintes solicitações:

a) força transiente em degrau aplicada no instante $t = \tau$ $(F\mu(t-\tau))$;

b) força estacionária $f(t) = F\sin\omega t$ com $\omega >> \omega_n$.

c) Indicar, sucintamente, como identificar o amortecimento do sistema.

d) Definir frequência natural de vibração e frequência de ressonância de amplitude e de fase.

2) A análise do comportamento dinâmico de um sistema assenta num modelo matemático desse sistema.

a) Caracterizar o modelo espacial de sistemas lineares discretos e de sistemas contínuos.

b) Estabelecer e representar graficamente a função de resposta em frequência deslocabilidade ou receptância sob a forma do diagrama de Bode e do diagrama de Nyquist, indicando aspectos notáveis destas representações (frequência de ressonância e assímptotas).

3) A análise do comportamento dinâmico de um sistema consiste na determinação das suas propriedades dinâmicas ou na determinação da resposta a determinado tipo de solicitação.

a) Definir espectro de choque e justificar a sua utilização em análise dinâmica de estruturas.

b) Justificar a utilização do modelo não amortecido do sistema com um grau de liberdade no estabelecimento de espectros de choque para diferentes tipos de transientes.

4) A resposta dinâmica de um sistema linear discreto com n graus de liberdade pode ser determinada por análise modal ou por integração directa das equações diferenciais do movimento.

a) Referir, sucintamente, os pressupostos de base da análise modal e de qualquer técnica de integração directa.

b) Justificar a utilização duma base modal truncada.

c) Caracterizar o método das diferenças finitas como técnica de integração directa das equações de movimento.

d) Referir os critérios básicos que condicionam a escolha do passo de integração.

5) Os métodos aproximados de determinação das frequências e formas naturais de vibração, como o método de Rayleigh e o método de Rayleigh-Ritz, assentam numa aproximação das formas naturais de vibração do tipo $\phi(x) = a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \ldots + a_n\psi_n(x)$, onde as funções $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,..., $\psi_n(x)$ são funções conhecidas da variável espacial x.

a) Indicar as propriedades mais relevantes do Quociente de Rayleigh.

b) Apresentar uma análise comparativa entre o método de Rayleigh e o método de Rayleigh-Ritz.

c) Caracterizar as funções características, as funções-teste e as funções admissíveis, e situá-las no espaço funcional.

d) Justificar o "relaxamento" de restricções das funções admissíveis em relação às funções teste.

Exame - 2002-02-06

Parte teórica

2. a) O modelo espacial de sistemas lineares discretos com n graus de liberdade baseia-se na obtenção das matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento para obter n equações diferenciais que caracterizem a resposta (em todos os graus de liberdade). A resposta é um vector formado pelas coordenadas generalizadas.

Nos sistemas contínuos o modelo espacial é obtido através da análise infinitesimal do sistema estabelecendo uma equação diferencial que, em casos específicos, pode ser simplificada desacoplando a influência temporal e espacial.

b) Saiu no outro teste

3. Saiu no outro teste

4. a) Na análise modal projecta-se o sistema de equações na base modal. Isto é possível porque a base modal é composta pelos n vectores modais que são ortogonais e, por isso, linearmente independentes. Assim a combinação linear dos mesmos pode descrever qualquer vector no espaço de dimensão n.

Na integração directa apenas se impõe que:

. Se verifica o equilíbrio dinâmico apenas nos instantes

de tempo discretos, t_i, espaçados de Δt;

• Existe uma variação (diferente para cada método) do deslocamento, velocidade ou aceleração no intervalo de tempo Δt.

b) É utilizada porque diminui muito o esforço computacional sem grande perda de precisão se seleccionados os modos correctos

c) • Método explícito,
• Não possui arranque próprio
• Condicionalmente estável

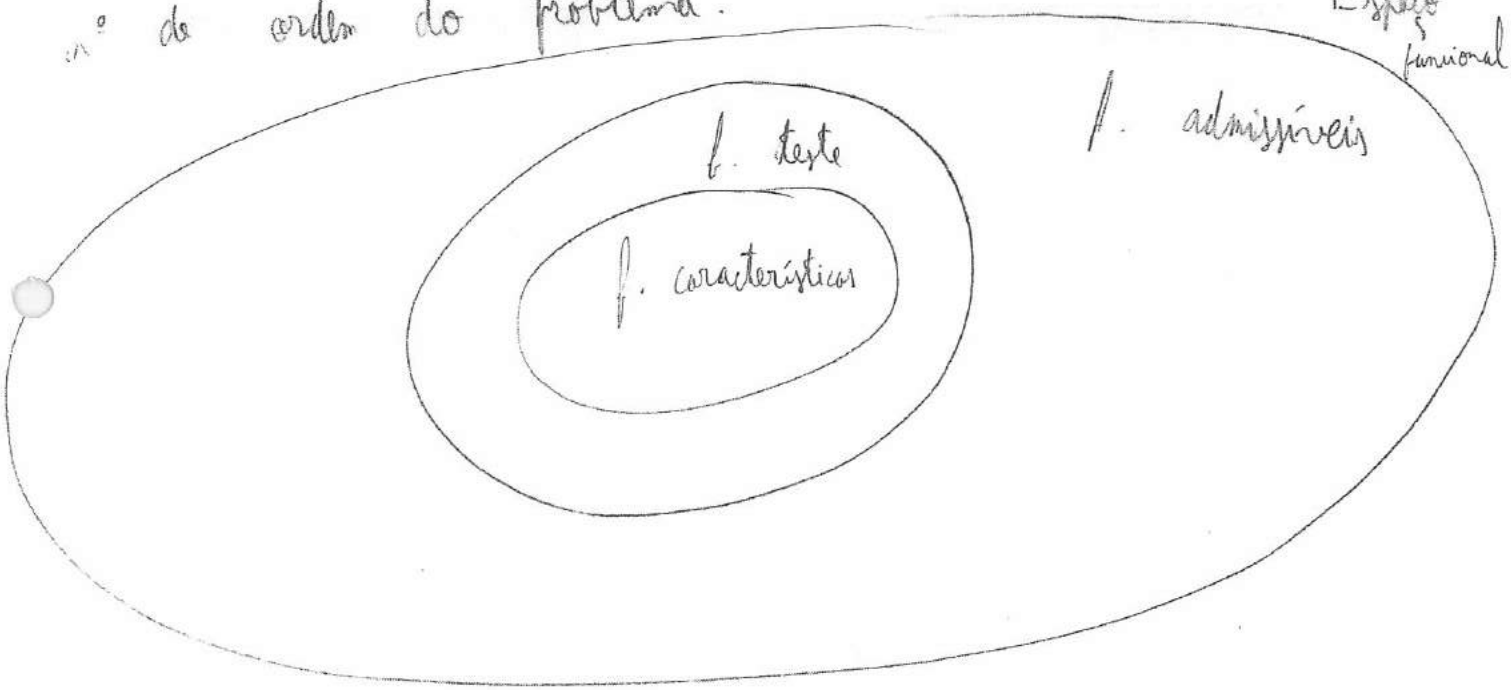
d) • O período natural associado ao modo de maior energia (maior frequência natural) que forma a base modal;
• O nº de pontos que se quer considerar dentro desse período

5. a) • Majorante da frequência fundamental ((minorante da maior frequência natural, que no caso de sistemas contínuos é ∞)
• Estacionaridade em torno da vizinhança da frequência fundamental.

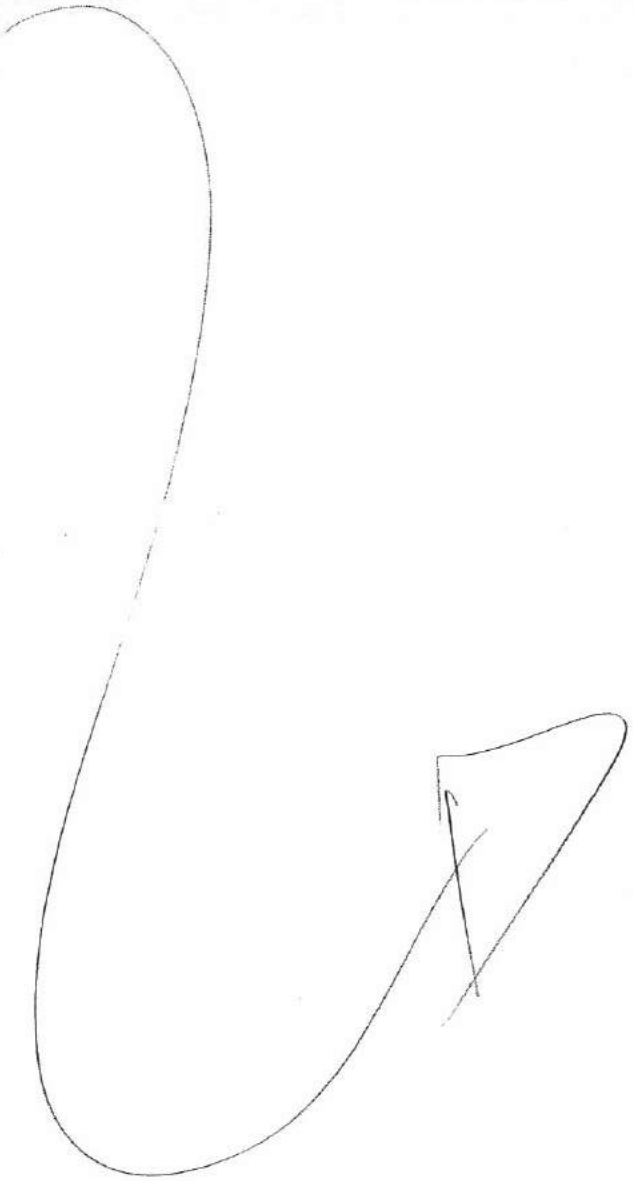
b) Não sai

c) As funções características são as funções exactas que descrevem os modos naturais de vibração, pelo que são as mais restritivas. As funções teste são funções quaisquer

desde que verifiquem todas as condições fronteira (geométricas e naturais) e têm de ser deriváveis pelo menos no mesmo nº de vezes do nº de ordem do problema. As funções admissíveis apenas têm de verificar as condições fronteira geométricas e só têm de ser deriváveis pelo menos metade do nº de ordem do problema.



d) Esse "relaxamento" é possível porque é feita a formulação fraca do problema, ou seja, o integral de cada equação diferencial já foi simplificado através de uma (ou mais) integração por partes baixando a ordem do problema para metade e exigindo apenas a verificação das condições fronteira geométricas. //



Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, está apoiada sobre dois apoios simples, apresentando um deles uma mola elástica de rigidez angular k, conforme se representa na figura.

a) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

Considerando como aproximação do deslocamento lateral da viga $V(x)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\psi_i=\sum_{i=1}^{n}\delta_i \sin\left(\frac{i\pi}{\ell}x\right)$,

b) verificar a aplicabilidade das funções de aproximação propostas e classificá-las.

Utilizando o método da energia de Rayleigh e considerando a constante de rigidez angular das molas $k=\alpha\frac{EI}{l}$,

c) determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

d) Representar graficamente a variação da frequência natural fundamental do sistema e do quociente de Rayleigh em função do parâmetro α, indicando eventuais valores particulares.

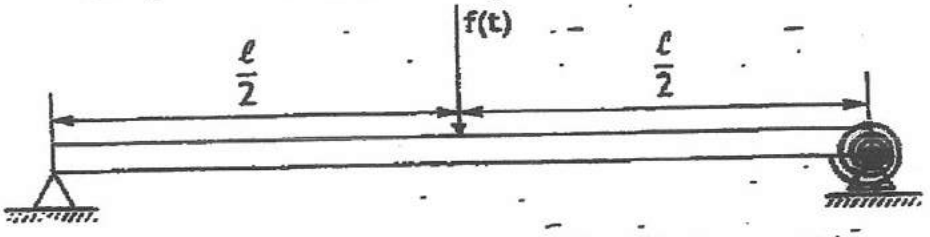
e) Estabelecer o intervalo de valores do parâmetro α para o qual é válida a solução fornecida pelo Quociente de Rayleigh.

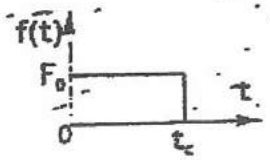
Utilizando o método de Rayleigh-Ritz e considerando o parâmetro $\alpha=5$,

f) determinar uma estimativa das frequências e formas naturais de vibração para n=2. Comentar o resultado obtido.

g) Esboçar as aproximações obtidas para as formas naturais de vibração. Comentar.

h) Determinar um majorante da resposta da viga para a solicitação representada na figura com $tc=0.19\sqrt{\frac{\rho A\ell^4}{EI}}$ s, não considerando a rigidez angular da mola.





Parte prática

a)

$$w(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow V(x)\Big|_{x=0} = 0 \quad (1)$$

$$w(x,t)\Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow V(x)\Big|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = K \cdot \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=l} = \frac{K}{EI} \left.\frac{d V(x)}{dx}\right|_{x=l} \quad (4)$$

(1) e (2) → Cond. geométricas

(3) e (4) → Cond. naturais

b) São derivadas n vezes com $n \to \infty$

$$\psi_i(x)\Big|_{x=0} = \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{l} \times 0\right) = 0 \quad \checkmark \ (1)$$

$$\psi_i(x)\Big|_{x=l} = \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{l} \times l\right) = 0 \quad \checkmark \ (2)$$

$$\left.\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \iff -\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi}{\ell}\times 0\right) = 0 \quad \checkmark\ (3)$$

$$\left.\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2}\right|_{x=\ell} = \frac{k}{EI}\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)\cos\left(\frac{i\pi}{\ell}\ell\right) \iff$$

$$\iff -\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi}{\ell}\ell\right) = \frac{k}{EI}\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)\cos(i\pi) \implies \times\ (4)$$

Logo são funções admissíveis (só verificam as cond geométricas)

c) $\psi_1(x) = \delta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)$

É a função que melhor aproxima a forma fundamental.

Energia potencial:

$$V_{mec} = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI(x)\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + V_{elas} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\ell EI\left(-\delta\frac{\pi^2}{\ell^2}\sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2}K\left(\frac{dV(l)}{dx}\right)^2 =$$

$$= \frac{EI}{2}\frac{\delta^2\pi^4}{\ell^4}\left(\frac{\ell}{2}\times 1\times \ell\times\frac{1}{\ell} - 0\right) + \frac{1}{2}\overbrace{K}^{\propto\frac{EI}{\ell}}\left(\delta\frac{\pi}{\ell}\cos\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot\ell\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{EI}{\ell^4}\frac{\delta^2\pi^4\ell}{2} + \frac{1}{2}\propto\frac{EI}{\ell}\frac{\delta^2\pi^2}{\ell^2} \implies$$

$$\Rightarrow V_{max} = \frac{1}{2}\frac{EI}{l^4}\left(\frac{\delta^2\pi^4 l}{2} + \alpha\delta^2\pi^2 l\right)$$

Em. cinética:

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\left(V(x)\right)^2 dx + \overbrace{\text{cfm}}^{=0}\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\int_0^l \delta^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{l}\cdot x\right) dx\right) = \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\cdot\delta^2\cdot\left(\frac{l}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\times 2\right)\right) =$$

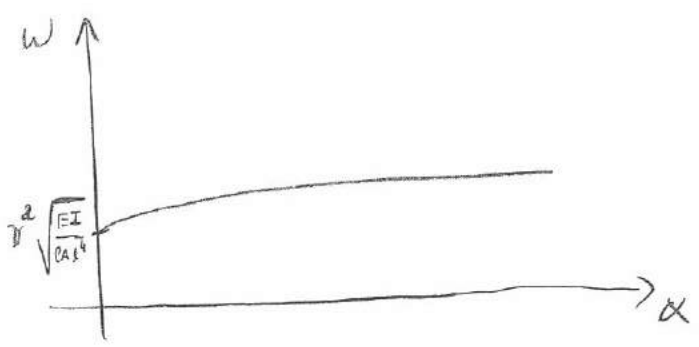
$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\,\delta^2\frac{l}{2}\right)$$

Logo:

$$K(V,1) = \omega^2 = \frac{\frac{1}{2}\frac{EI}{l^4}\left(\frac{\delta^2\pi^4 l}{2} + \alpha\delta^2\pi^2 l\right)}{\frac{\rho A}{2}\,\delta^2\frac{l}{2}} =$$

$$= \frac{EI}{\rho A l^4}\left(\pi^4 + 2\pi^2\alpha\right) \Rightarrow \omega = \sqrt{\pi^4 + 2\pi^2\alpha}\cdot\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

d)



e) Valores limite.

$\alpha \longrightarrow 0$; cond. geométricas:

$V(x)\Big|_{x=0} = 0$ ✓

$V(x)\Big|_{x=l} = 0$ ✓

$\alpha \longrightarrow \infty$, condições geométricas.

$V(x)\Big|_{x=0} = 0$ ✓

$V(x)\Big|_{x=l} = 0$

$\left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=l} = 0 \Rightarrow \delta_1 \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi}{\cancel{l}}\cancel{l}\right) = 0 \Rightarrow -\delta_1 \frac{\pi}{l} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta_1 = 0$ ✗ , logo a solução não é válida quando $\alpha \longrightarrow \infty$

f) ; g) e h) não saem

Exame Especial de Vibrações FEUP - DEMEGI 23 de Dezembro de 2005
COM CONSULTA de UM TEXTO DE APOIO

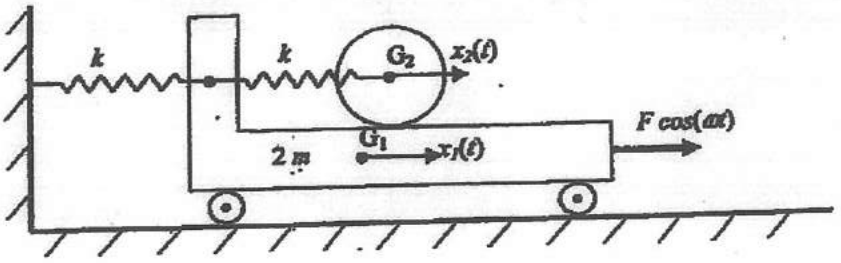


Figura 2

3. A viga representada na Figura 3 tem comprimento L, secção transversal de área A e segundo momento de área I (m^4); o módulo de elasticidade do material é representado por E e a massa volúmica por ρ. A viga está apoiada em dois apoios simples na extremidades e ligada a duas molas, a primeira tem rigidez k e a segunda é uma mola de torção com rigidez k_t. Considere apenas movimentos devidos à flexão da viga, sendo os deslocamentos pequenos.

a) Quais são as condições fronteira do sistema?

b) A função $V(x)=\delta sen(\pi x/L)$ pode ser aplicada para obter uma estimativa para a frequência fundamental de vibração através do método da energia de Rayleigh; ou seja, é uma função admissível?

c) Obtenha uma estimativa para a frequência fundamental de vibração.

d) A função sugerida em b) é aplicável para as seguintes condições limite:

1) $k \to 0$ e $k_t \to 0$?

2) $k \to \infty$ e $k_t \to 0$?

e) Sugira uma função admissível para o caso em que a mola a meio vão é substituída por um apoio simples.

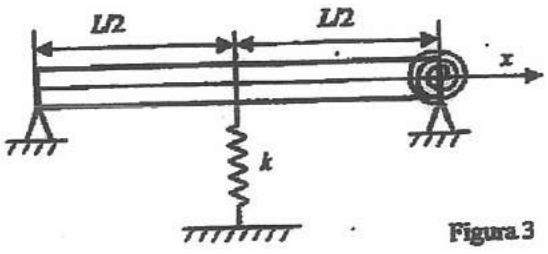


Figura 3

Justifique as respostas.

Exame Especial de Vibrações FEUP - DEMEGI 23 de Dezembro de 2005
COM CONSULTA de UM TEXTO DE APOIO

1.

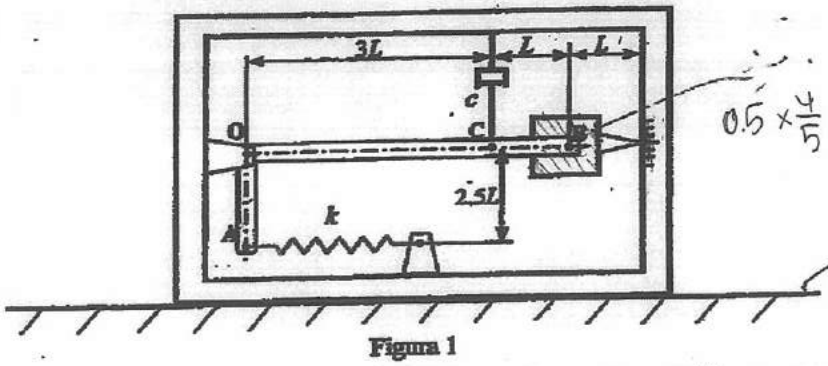


Figura 1

O desenho (Figura 1) representa um instrumento para medir a amplitude do deslocamento vertical de vibração de uma superfície. O instrumento é constituído por:
- Um braço rígido AOB em forma de L, de massa desprezável e que roda em torno do ponto O;
- Um corpo rígido de massa de m e momento de inércia I_B (unidades kg m^2) em relação a um eixo que passa por B; este corpo encontra-se ligado ao braço no ponto B;
- Um amortecedor de constante de amortecimento c, ligado ao braço no ponto C;
- Uma mola de constante de rigidez k, ligada ao braço no ponto A.

Em equilíbrio estático o segmento OB encontra-se na horizontal. Assuma que os deslocamentos são pequenos.

a) Obtenha a equação do movimento de rotação do braço.

Suponha que a frequência natural não amortecida do instrumento é 2.5 Hz, a razão entre duas amplitudes consecutivas de vibração em regime livre é 111 e a massa é 0.5 Kg. Suponha ainda que a equação do movimento angular é:
$25m\ddot{\theta}(t)+9c\dot{\theta}(t)+6.25k\theta(t)=0$
Determine:

b) a constante de rigidez da mola;
c) a razão de amortecimento;
d) a constante de amortecimento;
e) a amplitude do deslocamento de vibração da superfície quando a frequência de vibração é 2 Hz e o ponteiro indica uma amplitude de 0.5 mm (nota: o instrumento não se encontra calibrado).

2. O sistema representado na Figura 2 é constituído por um carro rígido de massa $2m$, ligado ao exterior por uma mola de rigidez k, que translada na direcção horizontal (deslocamento $x_1(t)$) por acção de uma solicitação harmónica $F\cos(\omega t)$. Tendo-se verificado a existência de vibrações indesejáveis acrescentou-se um disco rígido de massa m e raio R (momento de inércia $mR^2/2$ [kg m^2]) ligado ao carro por uma mola de rigidez k. O disco rola sem escorregar sobre o carro e $x_2(t)$ designa o deslocamento absoluto do seu centro de massa na horizontal. Determine

a) as equações do movimento recorrendo às Equações de Lagrange;
b) as frequências naturais e as formas naturais de vibração;
c) as equações de movimento na base modal;
d) o valor da frequência de excitação para a qual a amplitude de vibração do carro é nula.

Exame Especial de Vibrações – 23/12/05

CONFIRMAR!

2. $J_{G_2} = m \frac{R^2}{2}$ $Kg\,m^2$ ← Penso que não é o J_{G_2}

a) $T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$

$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$

Forças não - conservativas:

$Q_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(F \cos(wt) \cdot x_1\right) = F \cos wt$

$Q_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(F \cos(wt) \cdot x_1\right) = 0$

Então:

$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1$

$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial x_1} = k x_1 - k(x_2 - x_1) = 2k x_1 - k x_2$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$

$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(x_2 - x_1) = -k x_1 + k x_2$

Ficando:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1(t) + 2kx_1(t) - kx_2(t) = F\cos\omega t \\ m\ddot{x}_2(t) - kx_1(t) + kx_2(t) = 0 \end{cases}$$

Not. matricial:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\cos(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Fazendo $\{x(t)\} = \{u\}\cos(\omega t - \phi)$ e considerando regime livre:

$$\begin{bmatrix} 2k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\sqrt{2k(2-\sqrt{2})}}{2\sqrt{m}} \cong$$

$$\cong 0{,}5412\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{V} \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{2k(\sqrt{2}+2)}}{2\sqrt{m}} \cong 1{,}3066\sqrt{\frac{k}{m}}$$

1ª Forma natural:

$$\left(2k - 2m\omega_1^2\right)u_{11} - k\,u_{21} = 0 \Rightarrow u_{11} = \frac{\cancel{A}}{2\cancel{A} - 2m \times \frac{(2-\sqrt{2})}{2} \cdot \frac{k}{m}} u_{21}$$

$$\Leftrightarrow u_{11} = \frac{1}{2 - (2-\sqrt{2})} u_{21} \Rightarrow u_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_{21}$$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma Natural:

$$(2k - 2m\omega_2^2)\,u_{12} - k\,u_{22} = 0 \Leftrightarrow u_{12} = \frac{1}{2 - 2\times\frac{(\sqrt{2}+2)}{2}}\,u_{22} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{12} = \frac{1}{-\sqrt{2}}\,u_{22} \Leftrightarrow u_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,u_{22}$$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) Normalização de $\{u\}$:

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^T [m] \{u\}_i}}\,\{u\}_i$$

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m}} & -\frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]^T = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & \frac{2+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F\cos wt \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{2\sqrt{m}} \\ -\frac{F}{2\sqrt{m}} \end{Bmatrix} \cos wt .$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + \frac{(2-\sqrt{2})}{2} \cdot \frac{k}{m} \eta_1(t) = \frac{F}{2\sqrt{m}} \cos wt \\ \ddot{\eta}_2(t) + \frac{(2+\sqrt{2})}{2} \cdot \frac{k}{m} \eta_2(t) = -\frac{F}{2\sqrt{m}} \cos wt \end{cases}$$

d) Através de b):

$$\begin{bmatrix} 2k - 2mw^2 & -k \\ -k & k - mw^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(w) \\ X_2(w) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pág. 186:

$$X_1(w) = \frac{(k - mw^2) F - 0}{(2k - 2mw^2)(k - mw^2) - k^2}$$

Como queremos: $X_1(w) = 0 \Rightarrow (k - mw^2) F = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F = 0 \ \vee \ k - mw^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$ //

3. a)

$$v(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow V(x)\Big|_{x=0} = 0 \quad (1)$$

$$v(x,t)\Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow V(x)\Big|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = K_t \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=l} = \frac{K_t}{EI} \left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=l} \quad (4)$$

(1) e (2) cond. fronteira geométricas

(3) e (4) cond. fronteira naturais

b) É derivável pelo menos 2 vezes? Sim, função harmónica.

Verifica as cond. fronteira geométricas?

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} \times 0\right) = 0 \quad \checkmark \ (1)$$

$$V(x)\Big|_{x=\ell} = 0 \Rightarrow \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\cancel{\ell}} \times \cancel{\ell}\right) = 0 \quad \checkmark \ (2)$$

Logo, é uma função admissível!

c)

$$T_{max} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A \left(V(x)\right)^2 dx + \cancel{T^*_{cfm}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_{max}}{\omega^2} = \frac{\rho A}{2} \int_0^\ell \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T^*_{max} = \frac{\rho A}{2} \cdot \delta^2 \frac{\ell}{2} \times 1 \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\rho A}{2} \cdot \frac{\delta^2 \ell}{2}$$

$$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^\ell E I \left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} K \left(V\left(\frac{\ell}{2}\right) \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} K_t \left(\frac{dV(x)}{dx}\Big|_{x=\ell} \right)^2 = \frac{EI}{2} \int_0^\ell \left(-\delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} x\right) \right)^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2} K \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\cancel{\ell}} \cdot \frac{\cancel{\ell}}{2}\right) + \frac{1}{2} K_t \left(\delta \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{\cancel{\ell}} \cdot \cancel{\ell}\right) \right)^2 =$$

$$= \frac{EI}{2} \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^4} \cdot \left(\frac{\ell}{2} \times 1 \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} \right) + \frac{1}{2} K \delta^2 + \frac{1}{2} K_t \delta^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{EI}{l^4}\cdot\frac{\delta^2\pi^4 l}{2} + \frac{1}{2}K\delta^2 + \frac{1}{2}K_t\delta^2\frac{\pi^2}{l^2}$$

Então:

$$R(V(x)) = W^2 = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{EI}{l^4}\cdot\frac{\delta^2\pi^4 l}{2} + \frac{1}{2}K\delta^2 + \frac{1}{2}K_t\delta^2\frac{\pi^2}{l^2}}{\frac{\rho A}{2}\cdot\frac{\delta^2 l}{2}} =$$

$$= \frac{EI}{\rho A l^4}\cdot\left(\pi^4 + \frac{2K}{l} + \frac{2\pi^2 K_t}{l}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \sqrt{\pi^4 + \frac{2K}{l} + \frac{2\pi^2 K_t}{l}}\cdot\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

d)

1) $K \to 0$ não altera as cond. fronteira geométricas

$K_t \to 0$ não altera as cond. fronteira geométricas.

Logo, a função sugerida em b) continua aplicável

2) $K_t \to 0$ não altera as cond fronteira geométricas

$K \to \infty$ ALTERA. Passa a haver um apoio simples para $x = \frac{L}{2}$

Vejamos se a função de b) ainda verifica

as condições fronteira.

$$V(x)\Big|_{x=\frac{l}{2}} = 0 \Rightarrow \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}\cdot\frac{l}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$$

Mas se $\delta = 0$ então $V(x) = 0$ o que não pode ser.

Conclui-se que quando $K \longrightarrow \infty$ a função deixa de ser admissível.

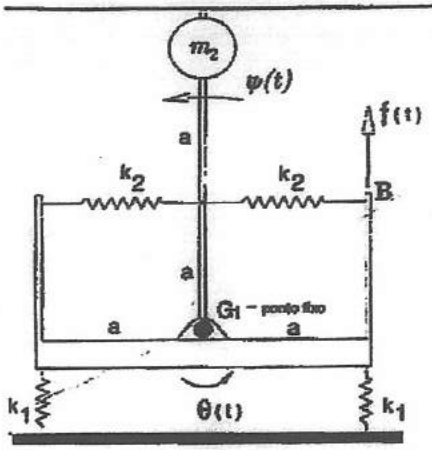
e) Continuando a considerar uma função harmónica, basta que o período da função seno seja igual a l.

$$V(x) = \delta \operatorname{sen}(\alpha x)$$

$$T = l \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\alpha} = l \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{l}$$

conclui-se que:

$$\boxed{V(x) = \delta \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{l}\cdot x\right)}$$



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por:

- Corpo 1 - uma estrutura rígida, de massa m_1 e momento de inércia J_{G_1}, ligada ao exterior no ponto G_1 por uma articulação e por duas molas lineares elásticas de igual rigidez k_1. Sobre esta estrutura actua uma força $f(t)$ no ponto B.
- Corpo 2 - uma massa m_2, suportada por uma barra rígida de massa e inércia não considerável, ligada ao exterior pela articulação anterior e ligada ao corpo 1 por duas molas lineares de igual rigidez k_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $\psi(t)$.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Considerando os dados abaixo indicados, determinar:

$$k_1 = 5k \qquad k_2 = 2k \qquad J_{G_1} = 8ma^2 \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\text{m}$$

b) (15%) as frequências e formas naturais de vibração do sistema. Esboçar e comentar as formas naturais de vibração;

c) (15%) as equações do movimento do sistema na base modal;

Tomando para valores de k e m os abaixo indicados, determinar:

$$k = 20000\ \text{N/m} \qquad m = 0.5\ \text{kg}$$

d)(10%) o valor máximo da resposta $\theta(t)$ quando $f(t) = F\,\delta(t)$ (solicitação impulso de valor F aplicada no instante inicial).

e)(10%) a amplitude $\Psi(\omega)$ da resposta $\psi(t)$ da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 25\,\text{rad/s}$.

f)(20%) Tendo em conta a solicitação da alínea anterior, alterar a distância entre a massa concentrada m_2 e o ponto G_1 de forma a que a amplitude $\Psi(\omega)$ da sua resposta seja reduzida de 5%.

3) (4 val.) Na figura representa-se um modelo simplificado das asas e da fuselagem de uma aeronave. As asas são modelizadas por duas vigas de comprimento ℓ ligadas rigidamente entre si por uma massa concentrada m que representa a fuselagem. As vigas têm uma secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. O modelo considerado está livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação) com energia elástica nula e frequência também nula.

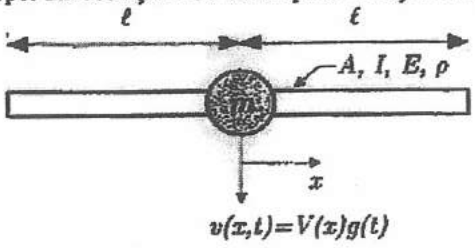
a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (15%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{\ell^2}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\varepsilon = \frac{m}{2\rho A\ell}$.

d) (20%) Indicar os valores exactos da frequência natural para os casos limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$.

e) (20%) Discutir a validade da solução fornecida pelo quociente de Rayleigh para os valores limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$. Se necessário, propor uma solução alternativa para a função de aproximação $V(x)$.



Exame de Recurso – 2007 - 07 - 12

Parte Prática

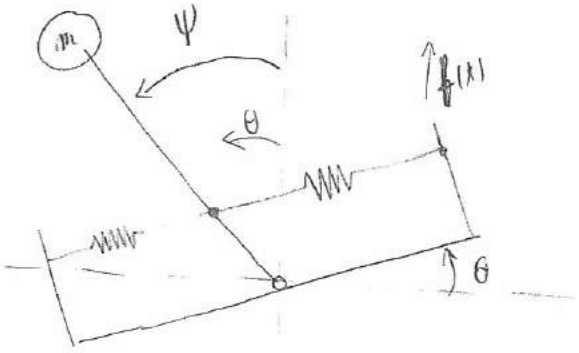
2. a) Admitindo deslocamentos pequenos, tal que $\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$ / $\sin\psi = \psi$ e $\cos\psi \approx 1$

$$T = \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d}{dt} \left(2a \underbrace{\sin \psi(t)}_{\approx \psi} \right) \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} 2a\, m_2\, \dot{\psi}^2$$

$$V = \left[\frac{1}{2} K_1 \left(a \underbrace{\sin \theta(t)}_{\approx \theta(t)} \right)^2 \right] \times 2 + \frac{1}{2} K_2 \left(a \underbrace{\sin\left(\psi(t) - \theta(t)\right)}_{\approx \psi(t) - \theta(t)} \right)^2 =$$

$$= V = \frac{1}{2} \cdot 2a^2 K_1 \theta^2(t) + \frac{1}{2} a^2 K_2 \left(\psi(t) - \theta(t)\right)^2$$



Forças não conservativas:

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(f(t) \cdot a \underbrace{\sin \theta}_{\approx \theta} \right) = a \cdot f(t)$$

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(f(t)\, a \underbrace{\sin \theta}_{\approx \theta} \right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_{G_1}\,\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_{G_1}\,\ddot{\theta}(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2a^2 K_1 \theta(t) - a^2 K_2 \left(\psi(t) - \theta(t)\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 2a\, m_2\, \dot{\psi} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = 2a\, m_2\, \ddot{\psi}(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = a^2 K_2 \left(\psi(t) - \theta(t)\right)$$

Logo:

$$\begin{cases} J_{G_1}\,\ddot{\theta}(t) + \left(2a^2 K_1 + a^2 K_2\right)\theta(t) - a^2 K_2\,\psi(t) = a^2\,\beta(t) \\ 2a\, m_2\,\ddot{\psi}(t) - a^2 K_2\,\theta(t) + a^2 K_2\,\psi(t) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 8ma^2 & 0 \\ 0 & 2am \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 12a^2K & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a^2\beta(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Fazendo $\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$ e considerando regime livre

$$\begin{bmatrix} 12a^2K - 8ma^2\omega^2 & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K - 2am\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calculando o det. característico:

$$\begin{vmatrix} 12a^2K - 8ma^2\omega^2 & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K - 2am\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{a=0,5} \Rightarrow \omega_1 \cong 0{,}6226\sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{V}$$

V $\omega_2 \cong 1{,}2698\sqrt{\frac{K}{m}}$

1ª Forma Natural:

$$(12\times 0{,}5^2 K - 8\cdot m\cdot 0{,}5^2\cdot\left(0{,}6226\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2)\,\mu_1 - 2\times 0{,}5^2\times K\,\mu_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_1 \cong 0{,}2247\,\mu_2$$

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}2247 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma Natural:

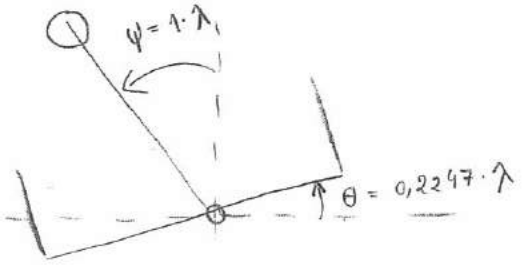
$$(12\times 0{,}5^2 K - 8m\,0{,}5^2\left(1{,}2698\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2)\,\mu_1 - 2\times 0{,}5^2\times K\,\mu_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_1 \cong -2{,}2244\,\mu_2$$

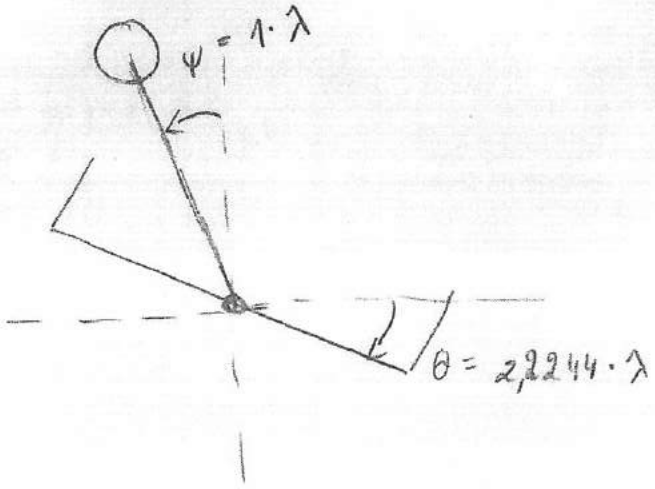
$$\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} -2{,}2244 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Esboço:

1ª Forma Natural:



2ª Forma Natural:



Comentário: No 1º modo o movimento é em fase mas no 2º o movimento é em oposição de fase.

c) Normalização.

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^T [m] \{u\}_i}} \{u\}_i$$

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{0,5505}} \begin{Bmatrix} 0,2247 \\ 1 \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} 0,3029 \\ 1,3478 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{5,4480}} \begin{Bmatrix} -2,2244 \\ 1 \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} -0,9530 \\ 0,4284 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,3029 & -0,9530 \\ 1,3478 & 0,4284 \end{bmatrix}$$

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\} \Rightarrow$$

Já substituindo $K = 20000\ N/m$ e $m = 0,5\ kg$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 124,52^2\,\eta_1(t) = 0,3029 \times a^2 f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 253,96^2\,\eta_2(t) = -0,9530 \cdot a^2 f(t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 124,52^2\,\eta_1(t) = 0,075725\, f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 253,96^2\,\eta_2(t) = -0,23825\, f(t) \end{cases}$$

d) Como o impulso é aplicado em $t = 0$:

$$\eta_1(t) = 0,075725\ F \cdot \frac{1}{\underbrace{m_{eq}}_{1} \underbrace{\omega_1}_{124,52}} \operatorname{sen}^{\circ} \omega_1 t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta_1(t) = 6,081 \times 10^{-4}\ F \operatorname{sen} 124,52t$$

$$\eta_2(t) = -0,23825\ F \cdot \frac{1}{253,96} \operatorname{sen} 253,96 = -9,381 \times 10^{-4}\ F \operatorname{sen} 253,96t$$

Então, como $\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\}$

$$\theta(t) = 0,3029\,\eta_1(t) - 0,9530\,\eta_2(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = 1,842 \times 10^{-4} F \operatorname{sen} 124,52t + 8,940 \times 10^{-4} F \operatorname{sen} 253,96t$$

Então o que podemos afirmar:

$$\theta(t)_{max} \leq 1{,}842 \times 10^{-4} F + 8{,}940 \times 10^{-4} F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t)_{max} \leq 1{,}078 \times 10^{-3} \cdot F}$$

e) Pela alínea b):

$$\begin{bmatrix} 12a^2K - 8ma^2\omega^2 & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K - 2am\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(\omega) \\ \Psi(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Indo à pág. 186:

$$(9.19) \rightarrow \Psi(\omega) = \frac{0 - (-2a^2K)F}{(12a^2K - 8ma^2\omega^2)(2a^2K - 2am\omega^2) - (-2a^2K)^2}$$

Para: $a = 0{,}5\ m$; $K = 20000\ N/m$; $m = 0{,}5\ kg$; $\omega = 25\ rad/s$

$$\Psi(\omega) \cong 2{,}104 \times 10^{-5} F$$

f) Reparar que apenas a altura da haste varia (não muda a largura do corpo 1). Também parece claro que a altura de acção das molas K_2 também não muda, pelo que considerarei que apenas a distância "a" das molas até à massa muda.

Assim, na alínea a) o único termo que muda no formalismo de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = (a+b)\, m_2\, \ddot{\psi}(t)$$

Ficando

$$\begin{bmatrix} 12a^2K - 8ma^2\omega^2 & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K - (a+b)m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(\omega) \\ \psi(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Logo: ($2,104\times10^{-5}$ F) . 0,95

$$\psi(\omega) = \frac{-(-2a^2K)F}{(12a^2K - 8ma^2\omega^2)(2a^2K - (a+b)m\omega^2) - (-2a^2K)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = -0,8479 \text{ m}$$

Não dava para mudar só aquele troço da haste.

Devia considerar-se que as molas K_2 continuavam a meio da haste mas agora a uma distância b do G_1, e refazer a alínea a).

VD

3. a)

$$EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=-l} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=-l} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=-l}\right) = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{d^3 V(x)}{dx^3}\right|_{x=-l} = 0 \quad (2)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

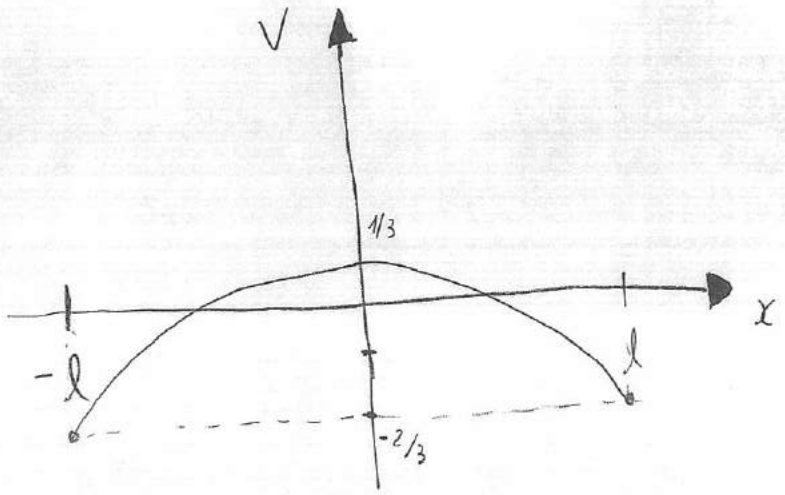
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l}\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^3 V(x)}{dx^3}\right|_{x=l} = 0 \quad (4)$$

Todas as condições fronteira são naturais

b) Tem de ser derivável 2 vezes (pelo menos); uma vez que o problema de vibração de uma viga à flexão é de 4ª ordem na variável espacial:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{2x}{l^2} \quad ; \quad \frac{d^2 V(x)}{dx} = -\frac{2}{l^2}$$

Tem de verificar as condições fronteira geométricas, que como neste caso não existem, não é necessário fazer mais nenhuma verificação. A função é admissível.



c)

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell} EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \overbrace{V_{efm}}^{=0} =$$

$$= \frac{EI}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left(-\frac{2}{\ell^2}\right)^2 dx = \frac{EI}{2}\cdot\frac{4}{\ell^4}\cdot\left(\ell-(-\ell)\right) =$$

$$= \frac{EI}{2}\cdot\frac{8\ell}{\ell^4}$$

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\varrho A\left(V(x)\right)^2 dx + \frac{1}{2}m\left(V(x)\big|_{x=0}\right)^2\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\varrho A}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{\ell^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\varrho A}{2}\left(\frac{4\ell}{45}-\left(-\frac{4\ell}{45}\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{m}{9}\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\varrho A}{2}\cdot\frac{8\ell}{45} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{9}\right)$$

$$R(V(x)) = w^2 = \frac{\frac{EI}{\cancel{2}} \cdot \frac{8l}{l^4}}{\frac{\rho A}{\cancel{2}} \frac{8l}{45} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{m}{9}} =$$

$$= \frac{EI}{\rho A l^4} \frac{1}{\frac{1}{45} + \frac{m}{72 \rho A l}} = \frac{EI}{\rho A l^4} \cdot \frac{45}{1 + \frac{5}{4} \cdot \underbrace{\frac{m}{2 \rho A l}}_{= \varepsilon}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w^{qr} = \sqrt{\frac{45}{1 + \frac{5}{4}\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

d) $m \to 0$: Viga livre-livre:

Pág. 359 $\rightarrow$ $\beta_2 l_{total} = 4,7300 \Rightarrow w^{qr} = (4,7300)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l_{total}^4}} =$

$$= 22,3729 \sqrt{\frac{EI}{\rho A (2l)^4}} = \frac{22,3729}{2^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \cong 5,5932 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

$m \to \infty$:

$$EI \left. \frac{d^3 V(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = \frac{1}{2} m \left(V(x)|_{x=0} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\left. \frac{d^3 V(x)}{dx^3} \right|_{x=0} \longrightarrow \infty$$

A viga não consegue mover a massa porque esta tem

uma inércia muito grande! Equivale a um apoio simples. Logo:

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0$$

Portanto há um nodo para $x=0$ fazendo com que a viga vibre segundo o 2º modo de vibração (considerando o 1º como sendo o modo com frequência não nula).

$$\beta_3 l_{total} = 7,8532 \Rightarrow w^{2} = 7,8532^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A (2l)^4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w^{2} = 15,4182 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

e) Para $m \to 0$ as condições fronteira não se alteram. No entanto quando $m \to \infty$ a viga passa a ter um nodo para $x=0$ pelo que a função $V(x)$ deixa de ser admissível. Para este caso uma função possível poderia ser:

$$V(x) = \frac{x^2}{l^2}$$

Embora não seja a melhor aproximação.

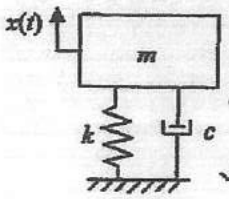


Figura 1

1 - A equação de movimento do sistema representado na Figura 1 é $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$.

a) Estabeleça a equação característica e obtenha as suas raízes em função de m, c e k. (1 valor)

b) Quando a razão de amortecimento ξ é menor do que 1, que forma têm as raízes da equação característica? Represente graficamente o movimento do sistema para este caso. (1)

2 - Considere um sistema com um grau de liberdade actuado por uma força harmónica. Neste caso, a equação diferencial do movimento é da forma $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F\cos(\omega t)$, com m, c, k e F constantes.

a) A resposta permanente pode-se escrever como $x_p(t)=B_1\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)$. Partindo desta expressão, deduza as expressões que relacionam a amplitude $X(\omega)$ e o ângulo de fase $\phi(\omega)$ da resposta permanente com m, c, k, F e ω.(1.5)

b) O factor de amplificação dinâmica $\mu(\omega)$ é dado por $\mu(\omega)=X(\omega)/X_S$, em que X_S representa o deslocamento estático. Represente graficamente o factor de amplificação dinâmica em função da razão de frequências ω/ω_n, para três casos típicos: razão de amortecimento muito pequena ($\xi<0.1$), média ($0.3<\xi<0.5$) e elevada $\xi>1$. (0.75)

3 – Sistemas com n graus de liberdade

a) Sugira uma transformação de coordenadas para desacoplar as equações do movimento de um sistema discreto com n graus de liberdade, não amortecido e sob a acção de forças exteriores. (0.75)

b) Escreva as equações do movimento desacopladas, explicitando a forma das matrizes e vector(es). (0.75)

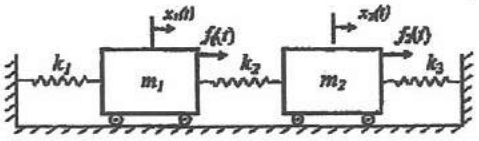


Figura 2

c) Suponha que as forças aplicadas ao sistema representado na Figura 2 são $f_1(t)=F_1\cos(\omega t)$ e $f_2=0$ e que ω varia. Quais são as amplitudes máximas do movimento das massas do sistema (sistema idealizado) e qual é a amplitude mínima, em módulo, de vibração da massa 1? (0.75)

4 – Deduza a equação diferencial parcial do movimento transversal, $v(x,t)$, de uma corda de secção transversal com área A, com módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ (A, E e ρ constantes), sujeita a uma força por unidade de comprimento $f(x,t)$, segundo z (Figura 3). (1.5)

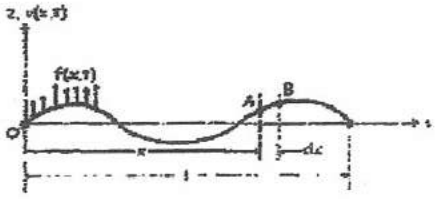


Figura 3

Relações trigonométricas: $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$; $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$; $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$.

Exame – 13/01/06

Parte Teórica

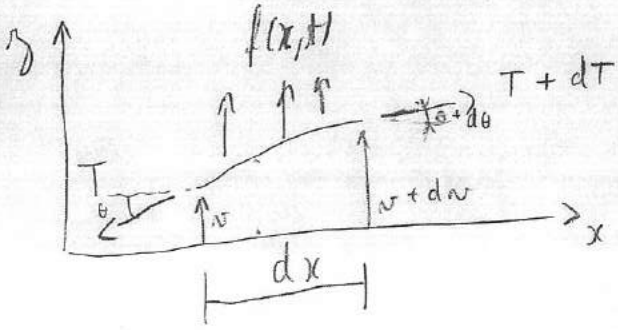
3. a) Uma transformação de coordenadas projectando o sistema de equações na base modal usando para o efeito a matriz de transformação formada pelos vectores modais normalizados para massas modais unitárias.

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \phi_{11} f_1(t) + \ldots + \phi_{n1} f_n(t) \\ \vdots \\ \phi_{1n} f_1(t) + \ldots + \phi_{nn} f_n(t) \end{Bmatrix}$$

c) As amplitudes máximas tendem para ∞ quando a frequência de excitação tende para uma das duas frequências naturais do sistema (para ambas as massas). A amplitude máxima da massa 1 é zero e ocorre para $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

4.



$$-T \operatorname{sen}\theta + f(x,t)\,dx + (T+dT)\operatorname{sen}(\theta+d\theta) = \rho A\,dx\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

Para θ pequenos:

$$\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}(\theta+d\theta) \cong \tan(\theta+d\theta) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx$$

Considerando tensão constante, $\frac{\partial T}{\partial x}\,dx = 0$

$$-T\frac{\partial v}{\partial x} + f(x,t)\,dx + \left(T + \cancel{\frac{\partial T}{\partial x}\,dx}^{\,=0}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\right) = \rho A\,dx\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

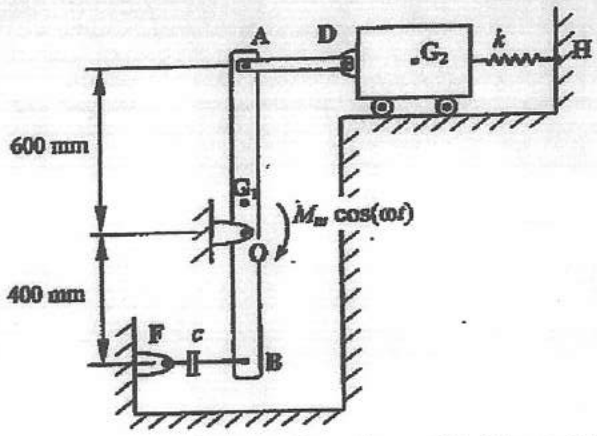
$$\Leftrightarrow \cancel{-T\frac{\partial v}{\partial x}} + f(x,t)\,dx + \cancel{T\frac{\partial v}{\partial x}} + T\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx = \rho A\,dx\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Dividindo tudo por dx

$$T\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \qquad \text{c.q.d.}$$

Exame de Vibrações de Sistemas Mecânicos Época Normal FEUP – DEMEGI 13 de Janeiro de 2006

Parte prática 2horas e 15 minutos PERMITIDA A CONSULTA DE UM TEXTO DE APOIO



$\overline{AB} = \ell = 1$ m

$\overline{AG_1} = \frac{\ell}{2}$

O sistema representado na figura acima é constituído por uma barra rígida[1], de massa m_b=2 kg. A barra está articulada no ponto O e sujeita à acção de um momento motor $M_m \cos(\omega t)$. Está também ligada ao exterior no ponto A através de uma pequena barra (AD), de uma massa rígida de 2 kg e de uma mola com rigidez k=50 N/m. A barra AD é rígida e de massa desprezável. Os pontos B e F encontram-se ligados por um amortecedor viscoso. Admita que os deslocamentos são pequenos e que em repouso a barra se encontra na vertical.

a) Obtenha a equação do movimento.

Suponha que a equação do movimento é: $0.9\ddot{\theta}(t) + 0.09c\dot{\theta}(t) + 15.06\theta(t) = M_m \cos(\omega t)$

e determine:

b) a frequência natural, ω_n;

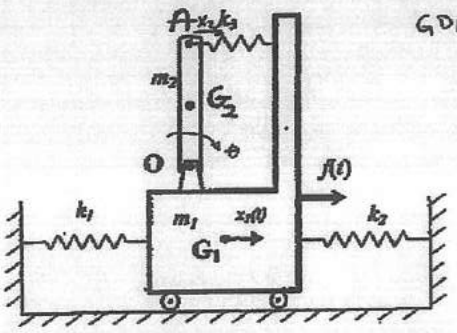
c) sabendo que o tempo que decorre entre dois picos sucessivos de vibração em regime livre é 2 segundos, calcule a constante de amortecimento c;

d) para uma frequência de excitação de 6 rad/s, calcule a amplitude (M_m) máxima do momento motor de modo a que a amplitude de vibração no ponto A não ultrapasse os 6 milímetros;

e) na situação da alínea anterior, obtenha as amplitudes das forças nos pontos A e B.

2 – O sistema representado na figura seguinte é constituído por duas molas, de rigidez k_1=1000 N/m e k_2= 2000 N/m, e por um carrinho rígido de massa m_1= 2.67 kg que translada horizontalmente (x_1(t)) sob a acção de uma força harmónica $f(t)$=F cos(ωt), com F=3 N. Verificou-se que a máxima amplitude de vibração ocorre à frequência de 30 rad/s, que é também a frequência de funcionamento do sistema. Para resolver este problema, acrescentou-se uma barra rígida[1] ao corpo 1, articulada no ponto O (rotação θ(t)), de massa m_2=1 kg e comprimento L=0.1 m, e uma mola de rigidez k_3= 500 N/m.

[1] Nota: o momento de inércia de uma barra em relação a um eixo que passa pelo seu centro de gravidade é $I_G = \frac{1}{12} m\ell^2$

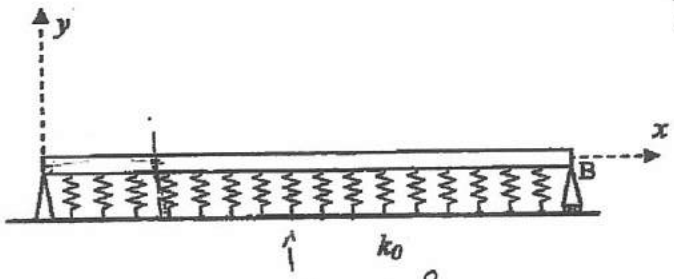


GDL = x_1, θ ou x_1, x_2 ?

a) Determine as equações do movimento recorrendo ao formalismo de Lagrange.
b) Determine as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.
c) Escreva as equações do movimento na base modal.
d) Qual deve ser o novo valor de k_3 de forma que a amplitude de vibração do carrinho seja nula.

3 – Uma viga (flexível) de comprimento ℓ, de secção transversal com área A e segundo momento área I (m^4), módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, encontra-se apoiada nas duas extremidades e assente sobre uma fundação elástica de rigidez por unidade de comprimento k_0. Pretende-se analisar a vibração à flexão desta viga.

a) Escreva as condições de fronteira do sistema.
b) Verifique se a função $V(x) = \delta\, sen\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$ é uma função admissível.
c) Determine uma estimativa para a frequência fundamental de vibração do sistema.
d) Calcule o erro da estimativa anterior quando $k_0 \to 0$. Comente o resultado.



$\overline{AB} = \ell$

k_{eq} ?

Parte Prática

2. a) Graus de liberdade: $\theta(t)$ e $x_1(t)$

θ: ângulo em torno de O (sentido anti-horário)

$$J_0 = \frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_2 l^2}{3}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2} \underset{\sim}{\sin}\theta + x_1\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 l^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{l}{2}\dot{\theta} + \dot{x}_1\right)^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_1^2 + \frac{1}{2} K_3 \left(l \underset{\sim}{\sin}\theta\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(K_1 + K_2) x_1^2 + \frac{1}{2} K_3 l^2 \theta^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(t) \cdot x_1\right) = f(t)$$

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(f(t) \cdot x_1\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2\left(\frac{l}{2}\dot{\theta} + \dot{x}_1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 \frac{l}{2}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = (k_1 + k_2)\, x_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_2 l^2}{3}\,\dot{\theta} + m_2\left(\frac{l}{2}\,\dot{\theta} + \dot{x}_1\right)\frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{7 m_2 l^2}{12}\,\ddot{\theta} + m_2 \frac{l}{2}\,\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = k_3 l^2 \theta$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\,\ddot{x}_1 + m_2 \dfrac{l}{2}\,\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)\, x_1 = f(t) \\ \dfrac{7 m_2}{12} l^2 \ddot{\theta} + m_2 \dfrac{l}{2}\,\ddot{x}_1 + k_3 l^2 \theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \frac{l}{2} \\ m_2 \frac{l}{2} & \frac{7 m_2}{12} l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_3 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $$\{x(t)\} = \{u\} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - (m_1 + m_2)\omega^2 & -m_2 \frac{l}{2}\omega^2 \\ -m_2 \frac{l}{2}\omega^2 & k_3 l^2 - \frac{7 m_2}{12} l^2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Substituindo valores, calculando o determinante característico e igualando-o a zero:

$$\begin{vmatrix} 3000 - 3{,}67\,\omega^2 & -0{,}05\,\omega^2 \\ -0{,}05\,\omega^2 & 5 - \frac{7}{12}\times 1\times 0{,}1^2\,\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \omega_1 \cong 24{,}9670 \text{ rad/s} \quad \vee \quad \omega_2 \cong 35{,}6740 \text{ rad/s}$

1ª Forma Natural:

$$\left(3000 - 3{,}67 \times 24{,}9670^2\right) u_1 - 0{,}05 \times 24{,}9670^2\, u_2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u_1 \cong 0{,}04376\, u_2$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}04376 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma Natural:

$$\left(3000 - 3{,}67 \times 35{,}6740^2\right) u_1 - 0{,}05 \times 35{,}6740^2\, u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow u_1 \cong -0{,}03809\, u_2$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}03809 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) Normalização:

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^T [m] \{u\}_i}} \{u\}_i$$

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{0,01724}} \begin{Bmatrix} 0,04376 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,3333 \\ 7,6167 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{0,007349}} \begin{Bmatrix} -0,03809 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,4443 \\ 11,6651 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 24,9670^2 & 0 \\ 0 & 35,6740^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,3333\, f(t) \\ -0,4443\, f(t) \end{Bmatrix}$$

Sendo : $f(t) = 3\cos(30t)$

d) Através de b):

$$\begin{bmatrix} 3000 - 3,67\,\omega^2 & -0,05\,\omega^2 \\ -0,05\,\omega^2 & 0,01\,K_3 - \frac{7}{12} \times 0,01\,\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ \Theta(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\cos(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Através da expressão 9.19, e sabendo que $\omega = 30\ rad/s$

$$X_1(\omega) = \frac{\left(0,01\,K_3 - \frac{7}{12} \times 0,01 \times 30^2\right) 3 - 0}{\left(3000 - 3,67 \times 30^2\right)\left(0,01\,K_3 - \frac{7}{12} \times 0,01 \times 30^2\right) - \left(-0,05 \times 30^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

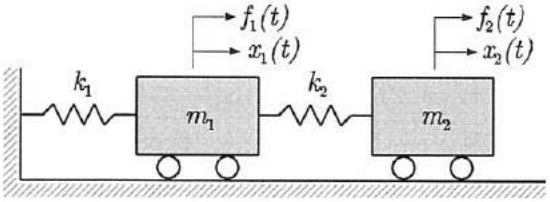
$\Leftrightarrow$ $\boxed{K_3 = 525\ N/m}$

1) (2 val.) As equações de movimento de um sistema linear discreto com n graus de liberdade são do tipo $[m]\{\ddot{q}(t)\}+[c]\{\dot{q}(t)\}+[k]\{q(t)\}=\{f(t)\}$

a) (30%) Definir coordenadas generalizadas e coordenadas naturais ou modais.

b) (35%) Caracterizar, justificando, as formas quadráticas associadas à energia cinética e à energia potencial elástica e, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez.

c) (35%) Definir: i)modo natural de vibração; ii) forma natural de vibração; iii) nodo de vibração.



2) (1.5 val.) Os vectores modais representativos das formas naturais de vibração de um sistema linear discreto não amortecido e com dois graus de liberdade representado na figura são: $\{u\}_1^T=\{1 \quad 1.5\}^T$ e $\{u\}_2^T=\{1 \quad -2\}^T$.

a) (30%) Representar graficamente o movimento $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas massas do sistema para o primeiro modo natural de vibração;

b) (30%) Indicar um conjunto de condições iniciais a aplicar ao sistema de modo que este responda em regime livre com um movimento idêntico ao segundo modo natural de vibração;

c) (40%) Para uma solicitação harmónica $f_1(t)=F\sin\omega t$, caracterizar a resposta do sistema e representar graficamente a amplitude de resposta $X_2(\omega)$, indicando eventuais pontos notáveis.

3) (1.5 val.) O comportamento dinâmico de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}=\{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\}=\{\dot{x}\}_0$. A resposta dinâmica em regime forçado pode ser determinada por análise modal.

a) (35%) Indicar a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal e a(as) vantagem(s) desta técnica na determinação e análise do regime forçado.

b) (30%) Justificar a utilização de uma base modal truncada. Discutir a dimensão da base modal truncada (número de modos naturais) no caso de uma solicitação harmónica de frequência ω e no caso de uma solicitação transiente "rectangular" de duração t_c.

c) (35%) Em que condições os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para determinar o regime forçado do sistema amortecido? Demonstrar.

4) (1.5 val.) O quociente de Rayleigh é utilizado, entre outras aplicações, para estimar a frequência fundamental de vibração de um sistema discreto ou contínuo.

a) (60%) Referir a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh e indicar quais os requisitos da aproximação da forma fundamental de vibração a utilizar no quociente de Rayleigh para:

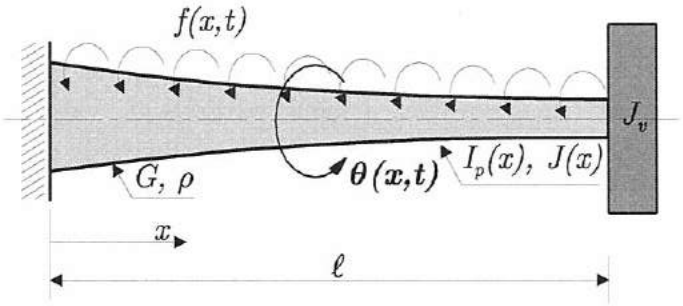
i. um sistema discreto; ii. um sistema contínuo.

b) (40%) Caracterizar o quociente de Rayleigh dum sistema linear discreto para um vector arbitrado $\{v\}$ que verifica a relação $\{v\}^T[m]\{\phi\}_1=0$, onde $[m]$ e $\{\phi\}_1$ representam, respectivamente, a matriz de massa e o primeiro vector modal do sistema.

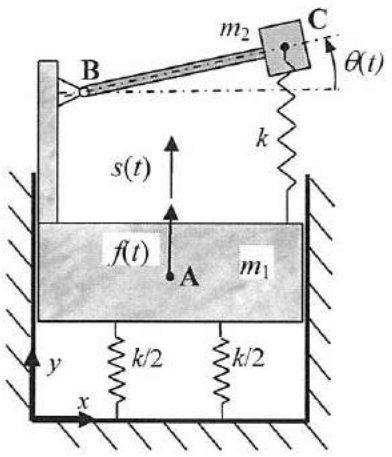
5) (1.5 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção $\theta(x,t)$.

a) (60%) Considerando um elemento infinitesimal de comprimento dx, estabelecer a equação diferencial de movimento e as condições de fronteira do veio representado.

b) (40%) Escrever as expressões integrais da energia elástica de deformação, da energia cinética e do trabalho das forças não conservativas.



FEUP, 23 de Junho de 2009



1) (6 val.) O sistema com dois graus de liberdade - $s(t)$ e $\theta(t)$ - representado na figura é constituído por um bloco e pelo pêndulo **BC**. O bloco tem massa m_1, está ligado a uma fundação por 2 molas lineares elásticas de rigidez $k/2$ e é actuado por uma força $f(t)$. O pêndulo **BC** é formado por uma viga rígida, de comprimento a ($\overline{BC} = a$) e de massa desprezável, e por uma massa m_2 localizada no ponto **C**. O mesmo pêndulo encontra-se ligado ao bloco por uma rótula plana em **B** e por uma mola linear elástica de rigidez k em **C**. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m, o sistema está em equilíbrio estático.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema recorrendo ao formalismo de Lagrange.

b) (20%) Supondo que é aplicada uma excitação da forma $f(t) = F\cos(\omega t)$, com ω a frequência natural do sistema sem o pêndulo (i.e., o sistema formado apenas pelo bloco e molas que o ligam à fundação), determinar a expressão a que m_2 deve obedecer por forma que as vibrações do bloco cessem.

Para responder às alíneas seguintes admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 11 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal.

e) (20%) Supondo que $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 1$ kg e $k = 2000$ N/m e considerando a resposta estacionária do sistema a uma força $f(t) = 10\cos(48t)$ N, obter, utilizando a análise modal truncada, uma estimativa para a força que as molas transmitem à fundação.

2) (6 val.) Na figura representa-se um veio de secção recta constante com momento polar I_p e de material com módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. Na extremidade $x = 0$, o veio está ligado a uma mola de torção de rigidez k_t e em $x = \ell/2$ está montada uma roda de momento polar de inércia J.

a) (10%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (10%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $\Theta(x) = \delta + \frac{x}{\ell}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração no método de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $\Theta(x)$.

Para $k_t = \alpha \frac{GI_p}{\ell}$ e $J = \beta \rho I_p \ell$,

c) (30%) Calcular a estimativa ω_{1R} da frequência natural de vibração utilizando o método de Rayleigh. Exprimir o resultado na forma $\omega_{1R} = \sqrt{\frac{G}{\rho \ell^2}} g(\delta, \alpha, \beta)$ onde $g(\delta, \alpha, \beta)$ representa uma função.

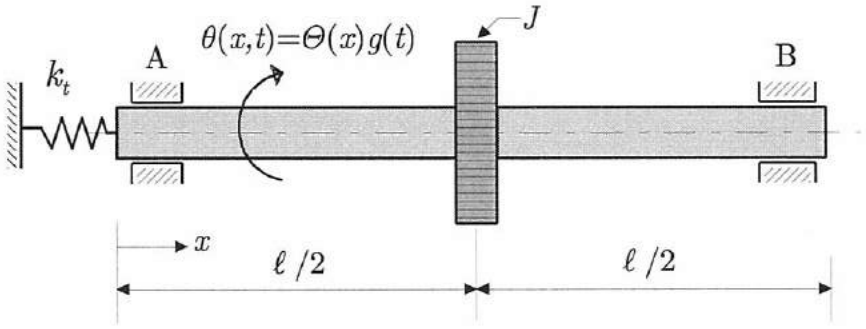
d) (15%) Discutir, justificando, a validade da solução obtida pelo método de Rayleigh para os valores limite de k_t : $k_t \to 0$ e $k_t \to \infty$.

Para $\alpha = 2$ e $\beta = 9$,

e) (15%) Determinar o valor óptimo do parâmetro δ da função $\Theta(x)$ como aproximação da primeira forma natural de vibração para o método de Rayleigh.

Para $J = 0$, utilizando a solução analítica exacta da torção para um veio de secção constante, $\theta(x,t) = \left(A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$,

f) (20%) Estabelecer a equação de frequências naturais de vibração de torção para o veio considerado.



Feup, 23.06.2009